

# Mostrar o demostrar?

Joaquim Castellsaguer

Departament de Matemàtiques, I.E.S. "Alexandre Satorras", Mataró

---

*L'autor intenta oferir un marc teòric i procedimental, basat en el treball amb els alumnes i en la reflexió sobre l'estructura i les possibilitats del programa Cabri-Géomètre, per a analitzar i classificar les activitats que s'hi poden realitzar i, per extensió altres activitats didàctiques en el camp de la geometria.*

## 1 El programa i les seves prestacions

El programa Cabri-Géomètre<sup>1</sup> ja és molt conegut dels ensenyants de matemàtiques. No és un programa gaire nou: la seva presentació pública a la comunitat dels ensenyants va ser feta aviat farà 10 anys, al congrés ICME-88 de Budapest. Darrerament està generant molt d'interès<sup>2</sup> i li apareixen alguns competidors<sup>3</sup>.

El programa presenta un escenari per a la geometria euclidiana plana consistent en un full de paper blanc (la pantalla), un llapis (el cursor), una goma virtual, i un regle i un compàs implementats en forma de possibilitat de traçar rectes, segments i circumferències. També conté dues addicions importants a la geometria euclidiana.

La primera, de caire pràctic, és la possibilitat de crear 'macros' que resumeixen construccions complexes i emprar-les només

invocant-les pel nom. Per exemple, es pot "ensenyar" l'ordinador a efectuar la projecció ortogonal d'un punt sobre una recta, com una construcció que combina el traçat de la perpendicular i la intersecció de dues rectes. Havent fet això pot afegir-se "Projecció ortogonal" al menú de construccions possibles, i emprar-la en qualsevol moment posterior en què sigui necessària sense haver-ne de repetir els passos regle-compàs elementals.

La segona addició és de caire més conceptual, i en ella rau la major part de l'atractiu del programa i del seu caràcter innovador. Es tracta de la possibilitat de desplaçar lliurement pel full de dibuix els elements que han servit de base a una construcció (punts, rectes o circumferències) tot mantenint les relacions geomètriques que han servit per dur-la a terme. Així es produeix una família infinita i contínua de casos

---

e-mail: [qcastell@pie.xtec.es](mailto:qcastell@pie.xtec.es)

<sup>1</sup>Hi ha dues versions (1 i 2) del programa, amb diferències conceptuals substancials. Em limitaré a la primera versió, menys rica en possibilitats però més fidel al model euclidià.

<sup>2</sup>Podeu consultar l'adreça [www-cabri.imag.fr](http://www-cabri.imag.fr). Hi trobareu més informació i materials.

<sup>3</sup>The Geometer's Sketchpad, Geometry Inventor, Geometric SuperSupposer.

particulars d'una configuració general.

Aquesta característica estén significativament la geometria euclidiana. És a dir: amb el seu ajut és possible resoldre problemes que no hi tenen solució, com és el cas de la trisecció de l'angle<sup>4</sup>... Això justifica que s'hagi proposat per ella un nom nou: la "geometria dinàmica".

Aquesta construcció és prou simple i elegant per servir d'il·lustració(veure Fig. 1). Els passos que cal seguir són:

- 1) l'angle  $AOB$  que es vol dividir es posa com a angle central en una circumferència;
- 2) es pren un punt arbitrari  $P$  en la recta  $AO$ ;
- 3) es traça la recta  $BP$ ;
- 4) sobre aquesta recta es pren un segment  $PX$  igual al radi de la circumferència;
- 5) es desplaça  $P$  fins que  $X$  coincideixi amb el punt  $Q$  en què  $BP$  talla la circumferència;
- 6) en una situació com aquesta, l'angle  $BPO$  és la tercera part de l'angle  $AOB$ .

Aquesta construcció és rigorosament euclidiana excepte el pas 5.

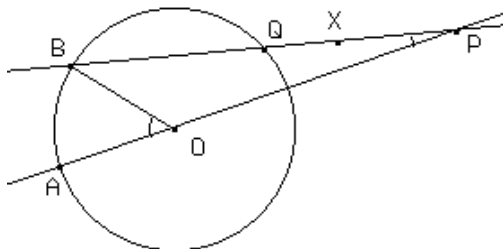


Figura 1. Trisecció d'un angle

## 2 Els elements d'una construcció

Començaré per un exemple molt clàssic i ben a l'abast de l'alumnat i que, malgrat la

seva senzillesa, conté tots els ingredients de l'anàlisi que vull portar a terme.

El professor<sup>5</sup> proposa a l'alumne de traçar un triangle amb el regle i de marcar els punts mitjans dels costats. L'alumne pot fer-ho -i ho farà segurament així, tot i que no sigui el més canònic- amb el regle graduat i dividint per 2 la mesura de cada costat. Ara ha de traçar les tres mitjanes unint els vèrtexs i els punts mitjans dels costats. Un cop fet, l'alumne pot observar que totes tres mitjanes són concurrents.

Aquest resultat pot ser interpretat com a purament casual i lligat a la forma particular del triangle dibuixat. Per tal d'evitar-ho, l'alumne pot construir un altre exemple o contrastar la seva observació amb la d'altres companys.

Però si la construcció es fa mitjançant l'ordinador, l'alumne pot deformar contínuament el triangle i veure que, sigui quina sigui la forma que adopti, la concurrència de les mitjanes es manté. Pot, doncs, formular el resultat "*les mitjanes d'un triangle són concurrents*" i afirmar-ne la validesa.

Ara, més d'un matemàtic reaccionarà pensant: "*Sí, però això s'ha de demostrar!*". M'agradaria preguntar-li: "*Per què? És que una demostració convencerà més l'alumne de la validesa de la propietat?*".

Perquè el punt central és la convicció. Alguns han estat ensenyats de tal manera que deriven la seva convicció de l'existència d'una demostració; alguns altres - la majoria - la poden derivar d'una experiència com aquesta. I per això aquesta experiència és valuosa.

Algú em podrà reprotxar que posar l'èmfasi en la convicció és caure en la retòrica. Hi estic d'acord i m'agrada caure-hi. La retòrica té molt poc a fer a la geometria i, en general, a la matemàtica<sup>6</sup>. Però en l'ensenyament de la matemàtica, que no és ben bé el mateix, com tots sabem, hi té un paper molt important.

<sup>4</sup>Arquímedes ja ho sabia.

<sup>5</sup>L'autor recomana els lectors (que són molt bons lectors) que llegeixin a tot arreu professor/professora, si així ho desitgen.

<sup>6</sup>Malgrat això, són nombroses les representacions pictòriques de les Arts Liberals al primer renaixement en què ambdues, la Retòrica i la Geometria, sota l'aparença de gentils donzelles, seuen ben a prop ornades amb els seus atributs.

Hem de valorar l'evidència - i hem d'educar-la. Durant molt de temps s'ha cregut que la metodologia de l'ensenyament de la geometria era l'adoptada per Euclides als *Elements*. Només cal veure on s'ha arribat per aquest camí: pràcticament a la desaparició de la geometria dels continguts de l'ensenyament bàsic<sup>7</sup>.

Tornaré a l'exemple per analitzar-lo per ell mateix introduint-hi una mica de terminologia.

Comença amb el que en diré **objectes inicials**: en aquest cas un triangle (tres punts i tres segments). I acaba amb l'afegit d'uns quants objectes més: els tres punts mitjans, els tres segments-mitjanes, el baricentre. Aquests són els **objectes finals**.

Els objectes inicials, els objectes finals i els objectes auxiliars eventuais formen una **figura geomètrica** o una **configuració**. El procés que porta a la constitució d'una configuració és una **construcció geomètrica**.

Entre els objectes d'una configuració s'estableixen determinades relacions (veure Fig. 2). Poden ser relacions d'incidència (alineació, concurrència, paral·lelisme, tangència, ...) o relacions mètriques (perpendicularitat, simetria, igualtat, proporcionalitat...) Algunes són les que permeten dur a terme la construcció: són les **relacions constitutives**. En aquest exemple són dues: la que fa aparèixer els punts mitjans dels costats, i la incidència de les mitjanes amb vèrtex i punt mitjà oposat. La figura s'ha fet tenint en compte això. S'observen unes altres relacions en la figura acabada, com el fet de la concurrència de les tres mitjanes. Aquesta relació no s'ha tingut en compte en fer la figura, sinó que "ha sortit" un cop feta. És una **relació conclusiva**.

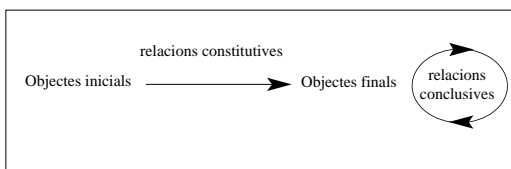


Figura 2. Elements d'una construcció

La concurrència de les mitjanes es manté quan es desplacen lliurement els objectes inicials. Una relació conclusiva amb aquesta propietat és un **invariant** de la configuració. **Les propietats geomètriques** no són altra cosa que l'afirmació d'existència d'invariants. El nostre alumne acaba, doncs, de descobrir una propietat geomètrica.

### 3 Un primer conjunt de procediments

Cabri-Géomètre ens pot servir per ensenyar geometria. No pas tota la geometria, perquè els continguts amb un fort component numèric (és el cas de la proporcionalitat) se li escapen bastant. Tampoc amb un caràcter exclusiu, ja que l'aspecte manipulatiu de la geometria exigeix emprar també eines i materials com el regle i el compàs, efectivament, però també paper, tisores, cordes, etc.

No faré aquí una descripció dels continguts conceptuals que es poden ensenyar bé amb el programa (per a més detalls, veure Castellsaguer, 1998); em limitaré a una incursió, ni que sigui superficial, en els procediments que es poden treballar. Per fer-ho canviaré l'exemple anterior per un altre de més ric - i de nivell més alt també - sense allunyar-me gaire, però, de les mitjanes. Ara en quedarà només una.

La nova situació s'estructura al voltant de la pregunta: hi ha triangles en què la mitjana que surt d'un vèrtex, l'altura que surt d'un altre i la bisectriu que surt del tercer són concurrents? Com poden caracteritzar-se i construir-se aquests triangles?<sup>8</sup>

#### *Procediment 1: Construir figures*

És l'activitat de produir una figura a la pantalla atenent exclusivament a l'enunciat previ de les seves relacions constitutives. És clar que, dit així, ha de referir-se a figures simples i l'alumne ha de conèixer bé tots els

<sup>7</sup>No dels currículums oficials-imaginariis, és clar!

<sup>8</sup>He tret el problema del número 90 de la revista "Le Petit Archimède" on hi ha tot el seu desenvolupament geomètric

termes que hi apareixen i saber com construir-los.

En el nostre cas, se suposa que els alumnes estan familiaritzats amb “mitjana”, “altura” i “bisectriu” i saben traçar-les, i que identifiquen la relació de concurrència.

La construcció habitual amb llapis i paper no assegura - casualitats a part - la concurrència dels tres segments. És el dinamisme del programa que fa possible retocar el triangle tant com calgui per aconseguir-la. En aquesta deformació, però, cada segment ha de mantenir-se fidel a la seva definició. La figura resultant es mostra a la fig. 3.

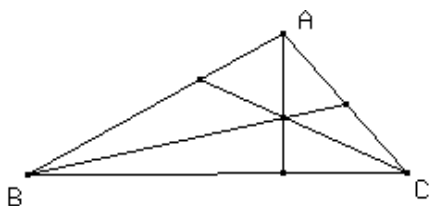


Figura 3. Construir figures

#### Procediment 2: Analitzar figures

Un cop la figura és acabada es tracta de descobrir-hi algunes relacions no previstes i que puguin ajudar a fer-ne una construcció millor. Fins i tot en algun cas aquestes relacions poden orientar sobre com elaborar una demostració d'un resultat.

Aquestes relacions han de ser intuïdes i comprovades. Com que la intuïció no està sempre disponible, el professor ha de suggerir sovint per on cal ficar el nas - o el ratolí. En el nostre cas, suggereixo traçar una recta perpendicular a  $BC$  i prolongar  $CA$  fins que la talli. Llavors es pot observar una relació d'igualtat inesperada:  $BC = AD$ . Ho mostra la Fig. 4.

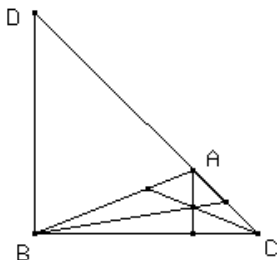


Figura 4. Analitzar figures

#### Procediment 3: Analitzar procediments

Com es pot aprofitar l'anàlisi anterior per descobrir una seqüència de passos que reconstrueixin la figura sense la inestabilitat que el desplaçament ha introduït abans?

Aquest treball és difícil i cal tenir molta cura en què l'ordre dels passos respecti cada moment els objectes ja construïts. Per això en el treball amb alumnes cal pautar molt bé el desenvolupament d'aquesta activitat.

Per posar un exemple del tot diferent mireu la Fig. 5, que presenta la construcció del costat  $DX$  del decàgon regular inscrit en una circumferència. Què s'ha de fer per determinar  $DX$  i en quin ordre?

En el cas que seguim, es tracta d'aconseguir  $ABC$  a partir, per exemple, de  $BC$ . Com podem arribar a  $A$ ? La resposta, en el procediment següent.

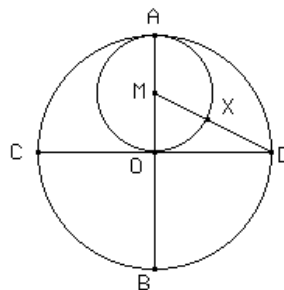


Figura 5. Analitzar procediments

#### Procediment 4: Formular procediments

És el moment de redactar clarament el “manual d'instruccions” per a la construcció del triangle. La redacció ha de ser clara i precisa, en llenguatge geomètric i no en llenguatge del programa informàtic, i ha de vetllar per anomenar clarament els objectes inicials i intermedis. La prova de la correcció del resultat és, evidentment, que algun alumne diferent del seu autor la segueixi per veure si arriba a la figura desitjada. Aquests són els passos:

- 1) es traça un costat  $BC$
- 2) es traça la perpendicular a  $BC$  pel punt  $B$
- 3) es pren un punt  $D$  arbitrari en la perpendicular

- 4) es traça el segment  $DC$
- 5) amb radi  $BC$  es traça una circumferència centrada en  $D$
- 6) aquesta circumferència talla  $DC$  en el vèrtex  $A$  que mancava.

#### *Procediment 5: Aplicar un procediment*

Això no presenta gaires dificultats: es tracta de “seguir les instruccions”. En molts casos és la forma de fer construccions segons una recepta, sense haver de deduir-la ni justificar-la més que pel seu resultat. Bé, hi ha alumnes que no ho troben pas tan senzill! No és estrany: el professor ha de tenir molta cura perquè la recepta contingui tots els ingredients, no contingui imprecisions i no s’oblidi d’indicar el temps de cocció...

#### *Procediment 6: Comprovar propietats*

El triangle ja està fet, però no tenim res més. Sembla lògic posar-hi la mitjana, l’altura i la bisectriu i mirar si són concurrents tal com ens proposàvem. Aquesta és una comprovació bastant assequible, sobretot si recordem de quin vèrtex partia cada una (perquè no són intercanviables). Podem comprovar, de passada, que hi ha molts triangles d’aquests.

Algunes comprovacions són de tipus visual, si per exemple “es veu” que dues rectes són paral·leles; d’altres són numèriques, com és el cas de moltes comprovacions d’igualtat que depenen de mesures de segments o d’angles. El programa (i en conseqüència l’usuari) no se sent gaire còmode en aquestes, perquè són de precisió baixa. Tot i que la majoria poden substituir-se per noves construccions (per exemple, la igualtat de segments pot visualitzar-se pel traçat de circumferències), l’alumne mitjà prefereix la mesura i val a dir que la gestiona bastant hàbilment.

Us acabo d’anomenar sis procediments que es treballen seqüencialment en un mateix exemple. Aquest és un cas excepcional. Normalment en una activitat geomètrica hi

intervenen només alguns d’ells, i sovint encadenats en una ordenació diferent.

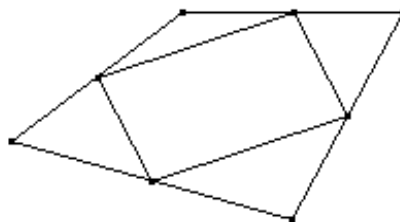
## 4 Un nou conjunt de procediments

Deixaré descansar merescudament el triangle i canviaré a un nou exemple, molt més elemental, per il·lustrar alguns procediments més. Ara serà un quadrilàter<sup>9</sup> qui prengui el relleu. Però els punts mitjans seguiran donant joc, perquè el nou problema, que s’atribueix a Varignon, és: quina figura formen els punts mitjans dels costats d’un quadrilàter?

#### *Procediment 7: Observar invariants*

És clar que abans de res cal exercitar el procediment 1 (Construcció d’una figura) per dissenyar l’escenari de la situació. El podem veure a la Fig. 6.

Figura 6. Observar invariants



“Sembla” que els punts mitjans formen un paral·lelogram. És sempre així? Només cal ‘agitar’ degudament la figura per estar-ne segurs. La forma de la figura, determinada per relacions de paral·lelisme, és un invariant.

L’observació d’invariants és un procediment potent i ben assimilat per la majoria dels alumnes, tot i que en alguns resulta desplaçada, per la fascinació de la imatge animada, exactament cap a l’extrem contrari. Aquests alumnes, en haver-los preguntat “*què observes si mous el quadrilàter inicial?*” només saben observar “*que l’altre també es mou*”.

<sup>9</sup>És curiós que la geometria dels quadrilàters sigui tan pobre, comparada amb la dels triangles...

### Procediment 8: Formular propietats

L'existència d'invariants s'ha de formular. Aquest és un procediment més difícil, perquè posa en joc les capacitats de verbalització i de redacció de l'alumne, i també el subtil concepte de "cas general" que tan poc sovint s'ensenya. Cal, generalment, iniciar la formulació per exercicis de completar frases. En aquest cas seria quelcom com:

"els \_\_\_\_\_ dels costats d'un \_\_\_\_\_ formen un \_\_\_\_\_".

### Procediment 9: Sistematitzar casos

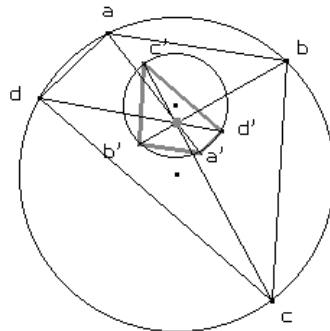
Un quadrilàter és una figura molt general, i en això rau la potència de la formulació anterior. Què passa amb les particularitzacions (rombe, trapezi,...) del quadrilàter? No cal repetir la construcció amb cada una d'elles: només cal deformar el quadrilàter fins a aconseguir bones expressions visuals de cada cas particular. Els resultats són bastant interessants.

### Procediment 10: Explorar situacions

Fa poc vaig proposar als meus alumnes de 4rt de Secundària<sup>10</sup>: "Preneu quatre punts en una circumferència. Aquests quatre punts determinen, presos de 3 en 3, quatre triangles. Què podeu dir dels baricentres d'aquests quatre triangles?".

Aquesta és una proposta d'investigació: un petit món per a explorar, uns quants atuellers per fer-ho, i una bona dosi d'iniciativa. Tot acompanyat, segons l'alumne i el moment, d'algun discret suggeriment. I els resultats? Més dels que jo mateix em pensava<sup>11</sup>.

Tal com es pot veure a la fig. 7, tots quatre baricentres són en una circumferència, que té radi  $1/3$  del radi de la inicial. Formen un quadrilàter que té la mateixa forma (els mateixos angles) que el que formen tots quatre punts. Els costats d'un quadrilàter i els de l'altre són paral·lels. Els segments que uneixen els vèrtexs corresponents dels dos quadrilàters es tallen en un punt. Aquest punt està alineat amb els centres de les dues circumferències i a triple



distància de l'un que de l'altre. Ho sabíeu?

Figura 7. Explorar situacions

## 5 Conclusió

Quan un professor vulgui, doncs, emprar un programa d'ordinador per treballar a les classes de geometria, no ha de sentir-se insegur ni pels seus principis ni escèptic pels resultats. Serà com un viatger per un territori encara bastant verge, però que conté paratges meravellosos i dels quals podrà gaudir mentre acompanya les noies i els nois. I no estarà sol.

### Referències:

#### A. Possibilitats didàctiques

Schumann, H. (1991) *Interactive Theorem Finding through Continuous Variation of Geometric Configurations*. Journal of Computers in Math and Science Teaching, vol.10, pp. 81-101.

Schumann, H. (1992) *Didactic Aspects of Geometry Learning Education Using the Computer as an Interactive Tool*. Journal of Computers in Math and Science Teaching, vol. 11, pp. 217-242.

King, J. R. i Schattschneider, D. eds (1997) *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Mathematical Association of America, 206 p.

#### B. Fonts de material geomètric clàssic

Shively, L. S. (1972) *Introducción a la geometría moderna*. Compañía Editorial Continental, México, 172 p.

Honsberger, R. (1995) *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, Mathematical Association of America, 174 p.

Sortais Y. i Sortais, R. (1987) *La géométrie du triangle*. Hermann, París, 210 p.

Loxeter, H.S.M. i Greitzer, S.L. (1994) *Retorno a la Geometría*. La tortuga de Aquiles, núm 1, Madrid, 188 p.

#### C. Material per als alumnes

Castellsaguer, J. (1998) *Regle, compàs i ratolí. Crèdit variable per a l'Ensenyament Secundari*. Text -

<sup>10</sup>En un crèdit variable de Geometria amb Cabri-Géométre

<sup>11</sup>Els alumnes no coneixien encara la terminologia de les homotècies