

# Els nombres racionals: una proposta didàctica

Josep Casadellà Reig

Dept de Didàctica de les Matemàtiques i de les CCEE, Facultat de Ciències de l'Educació, UAB,  
Josep.Casadella@uab.es

## Resum

*En aquest article l'autor pretén emfasitzar que les anomenades fraccions són en realitat nombres racionals i que no s'han de confondre amb una divisió entre naturals. La seva necessitat prové fonamentalment de la mesura de magnituds contínues, com és ara la longitud. L'aspecte de les fraccions és heretat de les proporcions. Les propietats aritmètiques dels racionals són deduïbles d'una bona definició i la qual cosa ofereix una alternativa a l'aprenentatge cec de procediments de càlcul.*

## Introducció

Els *ens* més primitius de què ens parla la matemàtica són els nombres i els objectes geomètrics. Tot i ésser creats per la ment humana, el contacte d'aquestes *criatures* amb la natura és tan evident que no ens cal tenir una gran capacitat d'abstracció per treballar amb ells. Així, doncs, no sorprèn que el primer contacte dels infants amb quelcom que tingui a veure amb la matemàtica persegueixi com a mínim donar suport a l'adquisició mental d'aquestes *construccions*.

Pel que fa als nombres naturals, comptar és l'activitat bàsica que permet afavorir-ne l'adquisició. Els experts constaten que assolir el domini d'aquests nombres no suposa cap dificultat. Però més enllà dels naturals, els altres nombres, els no naturals, resulten difícils de capir. En aquesta categoria podem col·locar els racionals, els reals i els complexos, per parlar només de nombres.

El treball que es presenta proposa reflexionar sobre la manera d'introduir els nombres racionals, crítica algunes de les maneres convencionals de fer-ho i en proposa d'alternatives, sense

intenció de fer-les passar com un remei assegurat per abatre totes les dificultats d'aprenentatge inherents a un tema prou complicat per ell mateix. Cal advertir que no és un treball complet. Solament conté un nucli fonamental format per definicions i justificacions de les propietats aritmètiques. Va destinat a professors de primària i ESO, als quals es deixa la feina de la transposició didàctica del que aquí es suggereix, si els sembla oportú.

## Fraccions, unitats i magnituds

Els defectes més importants que hom detecta en els llibres de text de matemàtiques de primària, pel que fa al tema dels nombres racionals, són:

1. Rarament s'hi esmenta que quan es parla de fraccions el que es tracta d'introduir són *nombres*, que són intermedis dels naturals. La naturalesa dels *nombres racionals* s'oculta darrera d'*éssers* enigmàtics, coneguts com a *fraccions*, amb numerador i denominador, això sí; endemés es poden sumar, restar, multiplicar, dividir i de vegades simplificar.
2. S'introdueix el concepte d'*unitat* de manera que sembla que una *unitat* pot ésser qualsevol cosa sencera, un rectangle, un pastís, una taronja, un armari, etc. Sembla que a les bones unitats els vagi bé una partició bona i fàcil. El pastís s'ha de repartir entre tots els comensals, el rectangle és compost per uns quants quadrats del mateix color i uns altres de color diferent, la taronja ja està dividida per dins, els armaris tenen calaixos, etc.
3. L'*u* i la *unitat* es confonen com si fossin i alhora no fossin la mateixa cosa; segons com sí segons com no. Igualment, a la tercera part del pastís correspon *la fracció*  $1/3$ . Si el

rectangle "unitat" té 12 quadrats i 7 d'aquests són de color grog, aquests representen també la fracció  $7/12$  del total.

4. S'obvien amb facilitat les justificacions de les regles que s'han d'emprar en les operacions aritmètiques amb fraccions (més que amb nombres racionals, tal com s'ha dit al punt 1). El resultat és que els objectius de les matemàtiques de primària, aquí també, es redueixen a memoritzar procediments de càlculs aritmètics.
5. Es confonen les fraccions amb operacions aritmètiques, concretament amb la divisió. Sembla *com si  $2/3$  es pogués definir com la divisió de 2 per 3*. Si hom no sap prèviament què és un nombre racional, no es pot esperar que el resultat de la divisió entre dos nombres naturals sigui quelcom diferent d'un o dos nombres naturals; és a dir, de cap manera pot ser un nombre racional, una cosa que no sabem encara què és.

Per posar fre a aquests defectes, hom sosté que és important trobar situacions problemàtiques que mostrin la conveniència de construir nombres diferents dels naturals. I que posats a fer-ho quedi clar que el que es pretén és fer nombres que complementin els naturals. Com que sovint el que és nou s'ha de construir amb allò que ja existeix prèviament, *els nombres racionals es construiran a partir dels nombres naturals*; en concret, dos naturals separats per una barra, el significat de la qual s'haurà de justificar. S'ha d'insistir que *l'entitat  $a/b$  es definirà com un nombre*, solament un, encara que es representi amb dos nombres i una barra.

La mesura, en especial la mesura de longituds, obre un marc molt idoni per mostrar la necessitat dels nombres racionals. Els jocs a l'aire lliure sovint requereixen definir camps de joc, espais a mesurar amb unitats convingudes *ad hoc*, com ara passes, peus, etc. També formen part del llenguatge quotidià certes particions de les unitats de mesura, com mig pas, un terç, un quart, etc.

En el terreny de la mesura, i probablement enlloc més, queda clar què representa la *unitat*. *Es tracta d'un valor d'una determinada magnitud emprat com a patró de mesura d'aquesta*

*mateixa magnitud*. S'ha de comprendre que els objectes d'aquest món tenen qualitats, algunes mesurables (comparables) i d'altres no. De manera que, a diferència de quan comptem objectes, la mesura s'efectua sobre magnituds dels objectes. Així doncs, per unitat acostumem a considerar la qualitat d'un objecte i no l'objecte en si mateix. En el cas de les longituds, per exemple, la unitat per excel·lència és el metre. Durant molts anys aquesta unitat venia representada per un objecte de platí, anomenat *metre patró* i guardat al Bureau International de Poids et Mesures de Sèvres (França). En la proximitat de l'aula hi ha sempre disponibles objectes de fusta o altres materials que emulen aquell patró, però *el que cal entendre per unitat de longitud no és l'objecte metre sinó la longitud d'aquest objecte* (concretament la longitud que separa dues marques extremes gravades sobre l'objecte).

Dit això, cal preguntar-se sobre quina mena de magnituds actua com a patró el pastís de diumenge passat. Em sembla absurd i equívoc anomenar unitat un objecte, simplement; hom ha pogut constatar la confusió que genera en els estudiants aquest plantejament, que deslliga les unitats de mesura de les magnituds corresponents.

### **Mesures i proporcions**

La longitud representa un exemple paradigmàtic de magnitud. Quan els nois i noies mesuren una determinada longitud mitjançant passes, utilitzen implícitament propietats de les magnituds com la suma i la multiplicació. Dir que s'ha mesurat una longitud de  $n$  passes suposa que s'ha de satisfer que els segments composts per altres tenen una longitud igual a la suma de les longituds dels components. És a dir, suposem que donat un segment  $AC$  elegim un punt qualsevol  $B$  del segment; llavors podem suposar que la longitud del segment  $AC$  és igual a la suma de longituds dels segments  $AB$  i  $BC$ . Aquesta additivitat de la longitud la suposarem en totes les magnituds.



**Definicions:**

Donada una magnitud  $M$  i un valor d'aquesta magnitud  $V$ , es defineix el producte d'un nombre natural  $n$  per  $V$  com la suma reiterada  $n$  vegades de  $V$ . El resultat és un nou valor de  $M$ , i s'expressa com  $nV$ .

Interessa el concepte de proporció perquè dona peu a la *forma* amb què es presenten les fraccions i els nombres racionals. Una proporció és una comparació simple de quantitats, *no pas una operació aritmètica*. Per exemple la proporció  $2/3$  compara el nombre 2 amb el 3. En sí mateixa, no en fa res d'aquest parell de nombres. D'una proporció sola no se'n pot treure gaire profit, però en canvi les proporcions guanyen un interès determinant quan intervien proporcions entre valors d'una mateixa magnitud i s'igualen a proporcions numèriques.

**Definició d'igualtat entre proporcions:** Sigui  $M$  una magnitud,  $V$  i  $W$  dos valors concrets d'aquesta magnitud (no són nombres, sinó per exemple longituds donades), es diu que aquests dos valors estan en la mateixa proporció que dos nombres naturals  $a$  i  $b$ , i s'escriu

$$V/W = a/b$$

quan existeix un valor  $U$  de  $M$  tal, que:

$$aU = V \quad bU = W$$

Per exemple, direm que una longitud  $L$  és una altre  $L'$  com 2 és 3, si podem trobar una longitud  $U$  determinada que ens serveixi d'unitat de mesura, de manera tal que  $L = 2U$  i  $L' = 3U$ . Llavors podrem escriure  $L/L' = 2/3$ .

Definida d'aquesta manera la igualtat entre proporcions, és aquest context on tindrien rellevància molts dels exemples dels llibres de text esmentats anteriorment, si diguessin les coses pel seu nom. Suposem un rectangle compost per 6 quadrats iguals, dels quals 5 són blaus i un és groc. Es pot afirmar, doncs, que l'àrea groga és a la blava com  $1/5$ , també que la groga és a la total com  $1/6$ , i la blava a la total com  $5/6$ .



D'igual manera es podria afirmar que cada tros de pastís, del qual s'han fet 12 parts iguals (en volum i forma), és al total com  $1/12$ , o també que cada tros és un dotzè del pastís, entenent per això una simplificació lingüística del que significa la igualtat de proporcions.

**Axioma de partició:**

En general se suposa que sempre és possible dividir un valor d'una magnitud qualsevol en les parts iguals que es vulgui, la qual cosa significa que aquesta suposició es considera com a certa sense demostració. Penseu en un segment d'una recta, per exemple, de longitud donada  $L$  (no s'ha de suposar que  $L$  ha de ser representada per un nombre sinó que cal fixar-se en la llargària del segment en brut sense que s'hagi mesurat necessàriament). Es considera que sempre és possible partir el segment en trossos iguals en una quantitat prefixada qualsevol. Així és com se suposa que es pot fer en l'exemple del pastís. Sigui quin sigui el nombre comensals, sempre es podrà partir el pastís en parts iguals, potser molt petites si són molts els comensals.

Aquest axioma, que s'anomena de partició, enunciat de manera general diria: *Donada una magnitud  $M$ , un valor d'aquesta magnitud  $V$  i un nombre natural  $n$ , sempre és possible trobar un valor  $U$  de  $M$  tal, que  $nU = V$ . També es diu que  $U$  mesura exactament  $V$ , i que el resultat de mesurar  $V$  emprant  $U$  com a unitat és  $n$ .*

Necessitarem aquest axioma per a demostrar el següent:

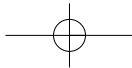
**Teorema**

*Si considerem  $M$  una magnitud, i  $V$  i  $W$  dos dels seus valors, si existeixen dos nombres naturals  $a$  i  $b$  que estiguin en la mateixa proporció que  $V$  i  $W$ , és a dir, que  $V/W = a/b$ , llavors  $bV = aW$ , i d'igual manera, si existeixen dos nombres naturals  $a$  i  $b$  tals, que  $bV = aW$  llavors  $V/W = a/b$ .*

El que s'ha dit anteriorment es pot expressar d'una manera més resumida:

$$V/W = a/b \quad \Leftrightarrow \quad bV = aW$$

El signe  $\Leftrightarrow$  significa que de la seva part esquerra es dedueix la de la dreta ( $\rightarrow$ ), i viceversa ( $\leftarrow$ ).



### Demostració

Suposem que  $V$ ,  $W$ ,  $a$  i  $b$  són tals, que  $V/W = a/b$ . Llavors, segons la definició d'igualtat de proporcions entre magnituds i nombres naturals, existeix un valor  $S$  de  $M$  que satisfà les igualtats.

$$aS = V \quad i \quad bS = W$$

Multiplicant la primera igualtat per  $b$  i la segona per  $a$ , s'obté que:

$$abS = bV \quad i \quad abS = aW$$

d'on es dedueix que:

$$bV = aW$$

Per a demostrar la inversa, suposem ara donada l'última igualtat:

$$bV = aW$$

A partir de l'axioma de partició esmentat anteriorment, i considerant el valor  $V$  de la magnitud  $M$  i el nombre natural  $a$ , ha d'existir un valor  $S$  de  $M$  tal, que:

$$aS = V$$

Llavors, substituint  $V$  per  $aS$  en la igualtat donada inicialment, tenim que:

$$abS = aW$$

És a dir,  $bS = W$ , que juntament amb  $aS = V$  ens afirma que, segons la definició d'igualtat de proporcions:

$$V/W = a/b,$$

que és el que es volia demostrar.

### Multiplicitat de proporcions equivalents (teorema)

Es pretén mostrar que si dos valors d'una magnitud estan entre si en la mateixa proporció que dos nombres naturals, llavors existeixen infinites parelles de nombres naturals que també estan en la mateixa proporció que els anteriors. Més formalment podem dir que:

$$bV = aW \rightarrow nbV = naW$$

per a qualsevol valor no nul de  $n$ , essent aquest un nombre natural.

Si resultés que  $a$  i  $b$  són nombres composts i compartissin un divisor, es mantindria una

nova igualtat deduïda de la primera. Suposem, per exemple, que  $d$  és un divisor comú de  $a$  i  $b$ , és a dir:  $d \cdot e = b$  per a un nombre natural  $e$ , i  $d \cdot f = a$  per a un nombre natural  $f$ . Llavors:

$$deV = dfW \rightarrow eV = fW$$

Donats dos nombres naturals  $a$  i  $b$ , la parella de nombres naturals  $x$  i  $y$  més petits que estiguin entre si en la mateixa proporció que  $a$  i  $b$  s'anomena *fracció irreductible* d'aquests, i en general les proporcions numèriques s'anomenen simplement *fraccions*. Es diu, doncs, que *les fraccions són equivalents quan representen una mateixa proporció*, i qualsevol d'elles és un prototipus de la classe d'equivalència, és a dir, del conjunt infinit de totes les proporcions equivalents a una de donada.

### Definició de nombres racionals i irracionals

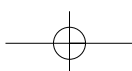
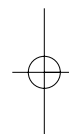
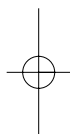
El sentit comú indica que quan mesurem una magnitud  $M$  d'un objecte o sistema, emprant un valor de  $M$  com a unitat, que designarem  $U$ , i diem que el resultat de la mesura dóna  $V = aU$ , on  $a$  és un nombre natural, estem indicant que la mesura dóna un resultat enter. *Es voldria estendre aquesta idea a nombres no enters de manera que sempre es podés dir que el resultat de la mesura és  $V = rU$ , en què  $r$  és un nombre, no necessàriament enter.*

També es pot dir que  $V$  mesurat per  $U$  dóna el nombre  $r$ , l'existència del qual es postula (sigui natural, racional o irracional) sempre que sigui vàlida la igualtat  $V = rU$ , o bé  $V/U = r/1$ , la qual cosa interpretarem com una definició del nombre  $r$ .

Com que la igualtat  $IV = qU$  es pot expressar en forma de proporcions que van més enllà de simples comparacions entre nombres naturals,  $V/U = q/1$ , les proporcions entre naturals ens assenyalen un camí per a representar una classe de nombres als quals anomenarem racionals. *Direm que  $q$  és un nombre racional quan existeixen fraccions  $a/b$  que igualen a la proporció  $q/1$ , és a dir:*

$$q/1 = a/b \quad \text{o també} \quad bq = a$$

Històricament es representa el nombre racional  $q$  mitjançant qualsevol de les infinites fraccions equivalents a  $a/b$ , tot i que hi ha una cla-



ra preferència a utilitzar la *fracció irreductible* de la classe d'equivalència o les que tenen denominador 10 o múltiple de 10, conegudes també com a *fraccions decimals*. Per exemple, al nombre  $q$  tal que sigui a 1 com  $3/5$  se l'anomena simplement  $3/5$ , que és una fracció irreductible, o bé  $6/10$ , que és una fracció equivalent a l'anterior però de denominador 10. Sovint les fraccions decimals s'expressen també eliminant els denominadors i fent servir la coma per a separar la part entera de la fraccionària menor que la unitat. Així, el nombre  $6/10$  que es fa servir d'exemple també s'escriu  $q = 0,6$ .

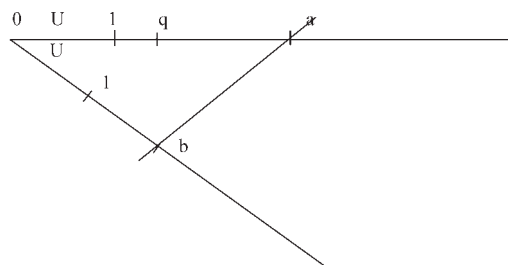
Si no existeix cap parella de nombres naturals que estiguin en la mateixa proporció de  $V$  a  $U$ , llavors el nombre  $r$  que satisfà  $V = rU$  rep el nom d'*irracional*.

#### **Recta numèrica, nombres naturals, racionals i irracionals**

Per posar un exemple del que s'ha dit anteriorment es proposa construir una *recta numèrica*, basant-se en el concepte de longitud. Suposem una longitud  $U$ , que prendrem com a unitat.

Observeu que la mesura de  $U$  emprant  $U$  dona sempre el nombre 1. Per exemple, si mesurem un metre emprant el metre com a unitat de mesura, el resultat és 1, però si el mesurem amb centímetres el resultat seria 100. Així doncs, no s'ha de confondre l'1 amb la unitat.

De totes maneres, la recta numèrica es construeix definint que cada punt representi un nombre i només un, que serà igual a la distància a què es troba aquest punt de l'origen, mesurada prenent com a unitat una qualsevol, la convencional  $U$  per exemple.



Admetem com un axioma que la longitud és una magnitud contínua (sense definir què s'ha d'entendre per continuïtat més enllà del que la intuïció assenyala), de manera que cada punt de la recta serà un nombre, que podrà ésser natural, racional o cap d'aquests; en aquest últim cas s'anomenen *irracionals*. En concret, els racionals són aquells nombres que es troben respecte a l'1 en la mateixa proporció que dos de naturals (o d'enters).

Per a mostrar més clarament el que intentem definir, adjuntem a la recta numèrica principal una d'auxiliar idèntica, construïda de manera que formi amb aquella un angle donat. Triem un nombre natural  $a$  de la recta numèrica principal i un de natural  $b$  de l'auxiliar. Unim els punts que representen aquests nombres naturals amb una recta. Totes les rectes paral·leles a aquesta assenyalen parelles de punts, no necessàriament naturals, que es trobaran en la mateixa proporció que  $a/b$ . Tracem ara una d'aquestes paral·leles que passi pel punt que representa l'1 a la recta auxiliar i talli la principal en el punt  $q$ . Segons el teorema de Tales, és evident que el nombre  $q$  estarà respecte a l'1 en la mateixa proporció que  $a/b$ . Una vegada més i de manera més explícita:

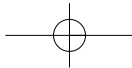
$$q/1 = a/b$$

En aquest cas diem que  $q$  és un nombre racional, i el representarem (per falta d'imaginació) també mitjançant la fracció  $a/b$ . Observeu que  $b \cdot q = a$ , segons el que s'ha demostrat anteriorment.

D'acord amb les definicions donades, també es pot considerar que els nombres naturals s'identifiquen amb els nombres racionals que satisfan la condició que la fracció irreductible dels quals tingui per denominador el nombre 1. D'aquesta manera s'interpreta que els nombres naturals són un subconjunt dels racionals.

#### **Operacions aritmètiques amb els nombres racionals**

El que és ideal és deduir les propietats de les operacions aritmètiques a partir de la definició donada de nombre racional. Si bé la suma i la resta són de totes maneres intuïtives, no es pot dir el mateix de la divisió i de la multiplicació, que són força contràries a la intuïció.



### Suma i resta de nombres racionals

Volem saber quant dóna  $p + q$  ( $p - q$ ), coneguts els dos nombres racionals. Essent representables per les fraccions conegudes  $p = a/b$  i  $q = c/d$ , segons la definició de racional resulta:

$$b \cdot p = a \quad i \quad d \cdot q = c$$

La suma de longituds i l'extensió de les propietats dels nombres naturals als nombres racionals aconsellen suposar, si es vol per definició, l'acompliment de la propietat distributiva i en general de les propietats aritmètiques dels nombres naturals. Així, multiplicant la primera igualtat pel nombre natural  $d$  i la segona pel nombre natural  $b$ , s'obté:

$$bd \cdot p = ad \quad i \quad bd \cdot q = cb$$

Sumant les dues igualtats i traient factor comú:

$$bd \cdot (p + q) = ad + cb$$

d'on deduïm que:

$$p + q = (ad + cb) / (bd)$$

resultat que expressa la fracció que representa la suma dels dos racionals en funció de les dues fraccions donades.

Si els denominadors de les fraccions que s'han de sumar fossin iguals, per exemple  $p = a/b$  i  $q = c/b$ , llavors podríem procedir de manera molt més ràpida, perquè de les igualtats:

$$b \cdot p = a \quad i \quad b \cdot q = c$$

s'obté, mitjançant la suma de les dues igualtats, que  $b \cdot (p + q) = a + c$ , d'on es dedueix que en aquest cas:

$$p + q = (a + c) / b$$

El cas de la resta és idèntic al de la suma, únicament cal substituir el signe + pel signe -.

### Multiplicació de nombres racionals

Suposem com abans que disposem de dos nombres racionals donats per dues fraccions i en volem conèixer el producte. Essent  $p = a/b$  i  $q = c/d$ ,

per definició:  $b \cdot p = a$  i  $d \cdot q = c$ .

Multiplicant entre si les dues igualtats s'obté:

$$bd \cdot pq = ac$$

d'on es dedueix que el producte buscat val:

$$pq = ac/bd$$

### Invers d'un nombre racional

Es defineix l'invers d'un nombre racional  $p$  donat com un segon racional  $p'$  tal, que multiplicat pel primer doni el nombre 1.

Si  $p = a/b$ , és diferent de zero, llavors  $p' = b/a$ , ja que  $1 = ab/ab$ . El zero no té invers.

### Divisió de nombres racionals

De la mateixa manera que en la multiplicació, suposem donats els racionals  $p = a/b$  i  $q = c/d$ . Es defineix la divisió del primer pel segon com un tercer nombre racional  $r$  tal, que el producte d'aquest pel segon doni el primer, és a dir,  $p \cdot r = q$  es defineix de tal manera que:  $r \cdot q = p$ .

Suposem  $r = x/y$ . Llavors la definició donada implica que:

$$x/y \cdot c/d = a/b$$

Sempre que  $c$  no sigui zero, existeix el racional  $d/c$ , que és l'invers de  $q$ , amb el qual multiplicant la igualtat anterior dóna:

$$x/y \cdot c/d \cdot d/c = x/y = a/b \cdot d/c = ad/bc$$

La qual cosa permet calcular el valor de la divisió buscada, és a dir:

$$a/b \cdot d/c = a/b \cdot d/c$$

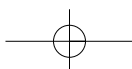
En el procés de construcció de la divisió ha aparegut la necessitat que el divisor sigui no nul. És a dir, no es pot definir la divisió per zero.

### La divisió de nombres naturals i racionals

Dins del domini estricte dels nombres naturals, la divisió genera dos nombres: el quocient i el residu. Ara que els nombres naturals s'inclouen dins dels racionals es permet interpretar la divisió de manera més completa. Suposem dos nombres naturals  $a$  i  $b$ . La seva divisió dóna:

$a \cdot r = b$  ( $q, r$ ) quocient i residu respectivament definits de tal manera que:

$$a = bq + r$$



Però com a racionals que són:

$$a \cdot b = a/1 \cdot 1/b = a/b,$$

expressió que ha causat moltes confusions, ja que indica que el resultat de dividir dos nombres naturals és igual al nombre racional donat per la fracció formada pel dividend i el divisor com a numerador i denominador respectivament. En la igualtat:

$$a \cdot b = a/b$$

no s'hauria d'entendre que el terme de l'esquerra és exactament el mateix que el de la dreta, sinó que l'operació assenyalada en el terme de l'esquerra de la igualtat (observeu que la divisió és una operació aritmètica entre dos nombres) dóna com a resultat el nombre de la dreta de la igualtat. Una operació aritmètica no és exactament el mateix, com a concepte, que el seu resultat.

Encara es pot avançar més en les relacions entre la divisió de nombres naturals i racionals. En efecte, en funció del quocient i del residu:

$$a/b = (bq + r) / b = bq/b + r/b$$

És a dir, si  $q$  i  $r$  són el quocient i el residu respectivament de la divisió  $a \cdot b$ , llavors:

$$a/b = q + r/b$$

És a dir, la divisió de  $a$  per  $b$  dóna com a resultat un nombre racional que és igual a la suma del quocient i un nombre racional menor que la unitat format pel residu com a numerador i el dividend com a denominador. La suma d'un nombre natural i un racional menor que la unitat s'anomena *nombre mixt*, en una terminologia més aviat confusa. Però donada la importància del sistema de representació de les fraccions decimals, en què se separen per una coma les parts enteres de les fraccionàries menors que la unitat, hom proposa que els nombres mixtos es representin separats també per una coma, siguin o no decimals les parts fraccionàries. D'acord amb això, s'hauria de poder escriure:

$$a \cdot b = q, r/b \quad \text{i si } b \text{ és } 10 \quad a \cdot b = q, r$$

Per exemple,  $3 \cdot 2 = 1,1/2$ , o també, com que  $1/2 = 5/10$ , llavors  $3 \cdot 2 = 1,5$

## El pas de fraccions ordinàries a decimals

La manera preferida per a representar els nombres racionals és la que explota en profunditat el sistema decimal, representat per 10 símbols diferenciats, el valor dels quals depèn de la posició. Per exemple, el nombre  $abc, defg$ , on cada lletra representa un dels deu dígit, significa:

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0 + e \cdot 10^{-1} + f \cdot 10^{-2} + g \cdot 10^{-3}$$

Per aquesta raó interessa saber passar d'una representació convencional en forma de fraccions a una altra mixta en la qual la part fraccionària, menor que la unitat, sigui igual a la suma de fraccions decimals de la forma *dígit* /  $10^n$ . Aquest sistema no sempre és el més convenient, sobretot quan el que interessa és la precisió.

Començarem amb un exemple. Volem buscar l'equivalent decimal d' $1/3$ . Ens interessa disposar d'una fracció decimal equivalent i  $10$  no és múltiple de  $3$ . Una manera de buscar-lo seria obtenir una fracció equivalent múltiple de  $10$ . En el seu defecte es multiplica per  $10/10$

$$1/3 = 1/10 \cdot 10/3$$

Però, segons el que hem vist anteriorment,  $10/3 = 3 + 1/3$ . Així, doncs, podem escriure:

$$1/3 = 1/10 \cdot (3 + 1/3) = 3/10 + 1/10 \cdot 1/3$$

Hem obtingut una primera fracció decimal, la de les dècimes, més una fracció menor que la dècima, que contindrà centèsimes, mil·lèsimes, etc. Observeu que aquesta part final menor que la dècima conté un factor igual a la fracció de partida. Això ens permetria substituir aquest factor per tot el desenvolupament posterior. És a dir:

$$1/3 = 3/10 + 1/10 \cdot 1/3 = 3/10 + 1/10 \cdot (3/10 + 1/10 \cdot 1/3)$$

Ordenant el resultat de la substitució queda:

$$1/3 = 3/10 + 3/100 + 1/100 \cdot 1/3$$

Tornem a recuperar la fracció inicial en l'últim factor, que podríem substituir pel seu desenvolupament, i així ad infinitum. De manera que una fracció tan senzilla i compacta com és ara  $1/3$  equival a una suma infinita de fraccions de-

cimals decreixents de numerador sempre 3 i denominador igual a potències creixents de 10.

$$1/3 = 0,33333 \dots$$

Aquest exemple il·lustra un procediment general. Sempre que es necessita, es multiplica per 10/10 i es reordena el resultat amb vista a obtenir un nou decimal. Per tant, el procediment general consisteix en l'aplicació reiterada dels mètodes següents: obtenir el quocient i multiplicar el residu per 10/10.

$$a/b = q + r/b = q + 1/10 \cdot 10r/b$$

Llavors  $10r/b = q_1 + r_1/b = q_1 + 1/10 \cdot 10r_1/b$ ; es repeteix fins que  $r_n/b = a/b$ , o bé  $r_n/b$  sigui una fracció ja apareguda anteriorment. A partir d'això es repetiria una seqüència de dígit, que s'anomena *període*. En general s'escriuria:

$$a/b = q, q_1q_2q_3 \dots$$

Aquest mètode és el que s'ha compactat en l'algorisme de la divisió amb decimals. Cada vegada que es vol un nou decimal s'afegeix un zero al residu i se segueix obtenint un nou dígit a la seqüència de decimals.

#### Bibliografia

BOYER, C. B. (1986). *Historia de la matemàtica*. Alianza Universidad Textos, Madrid.

CENTENO, J. (1988). *Números decimales*. Síntesis, Madrid.

CARPENTER T. P. i altres (eds) (1993). *Rational Numbers: an Integration of Research* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Subscriu-t'hi Col·labora-hi

e-mail:biaix@elistas.net  
www.xtec.es/entitats/biaix