

Per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu

Universitat Autònoma de Barcelona, Jordi.Deulofeu@uab.es

A l'article d'avui li escauria un títol com el següent: *D'un mal joc a una colla de problemes interessants*. En efecte, en l'article d'aquesta mateixa secció del número anterior (Biaix 21, desembre 2003) vaig proposar, entre d'altres, el següent joc d'estratègia per a dos jugadors: Dibuixeu una circumferència i assenyaieu 12 punts en ella. Al seu torn, cada jugador tria dos punts i dibuixa el segment que els uneix de manera que el segment no talli a cap dels prèviament dibuixats. El jugador que no pot traçar cap segment perd la partida. Com es pot fer per guanyar? Què passa si variem el nombre de punts inicials? Si ja l'heu pensat, possiblement haureu descobert què passa amb aquest joc; en cas contrari, us recomano que el penseu una mica abans de seguir.

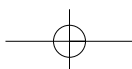
El que ve a continuació és una petita crònica de la meva història amb aquest joc i dels problemes que, una vegada superat "el tringol" d'una resolució no correcta, m'han anat sorgint a partir de la situació plantejada pel joc.

Les preguntes que vaig formular a continuació del joc, suggereixen que es tracta d'un típic joc d'estratègia, és a dir, que admet una estratègia guanyadora per un dels dos jugadors i, per tant, el que cal és trobar aquesta estratègia. Quan el vaig pensar vaig creure-ho així i ben aviat vaig trobar una estratègia de tipus simètric, que dona la victòria al primer jugador: si aquest traça el segment que uneix dos punts oposats (deixant cinc punts a cada costat del segment), per cada segment que dibuixi el segon jugador en un dels costats, el primer podrà traçar el corresponent en l'altre costat, per la qual cosa el primer jugador sempre guanyarà. Aquesta solució és la mateixa que dona el magnífic llibre *Mathematical Circles* (Fomin et al., 2000), d'on havia obtingut l'enunciat del joc (proble-

ma 17, pàgina 60, sota l'epígraf de simetria; solució a la pàgina 235), i en veure la coincidència vaig quedar ben convençut que es tractava d'una bona solució i, per tant, que no valia la pena pensar-hi més.

Un temps després, preparant jocs d'estratègia per treballar amb els nois i noies d'ESTALMAT (activitat extraescolar dirigida a l'estímul del talent matemàtic a Catalunya que, des del curs 2003-2004, realitza la FEM-CAT i la SCM), la Marta Berini em va fer veure l'error: efectivament el joc el guanya el primer jugador, per 12 punts (i per qualsevol altra quantitat de punts), però no cal que aplici cap estratègia especial, és a dir, juguin com juguin els dos jugadors sempre guanyarà aquell que dibuixi el primer segment. Ja teniu el primer problema (1): demostrar que per qualsevol nombre de punts, el nombre de segments dibuixats al finalitzar la partida està determinat, és a dir, només depen del nombre de punts inicial (recordeu que els segments no es poden tallar). Trobar quin és el nombre de segments si el nombre de punts és n és prou senzill; demostrar que és aquest per qualsevol partida és un xic més interessant.

Així doncs, el joc anterior no és un autèntic joc d'estratègia sino que es tracta d'un pseudo-joc (seguint la terminologia de Fomin en el llibre citat), és a dir, un joc on les pròpies condicions de la situació determinen a priori qui serà el guanyador. Un altre joc d'aquest tipus seria el següent (2): Anotem en un full de paper dos nombres primers entre ells, per exemple 25 i 36. Al seu torn cadascun dels dos jugadors fa la resta (positiva) de dos nombres escrits en el full i anota el resultat (sempre que aquest no estigui ja anotat). El jugador que no pot anotar cap nou nombre perd la partida. Per què es



tracta d'un pseudo-joc? Què passa si els nombres no son primers relatius?

Si deixem de banda els joc, però mantenim la situació inicial del primer (traçar segments que uneixen n punts sobre una circumferència); podem plantejar diversos problemes interessants que complementen l'anterior. Una primera qüestió sorgeix si eliminem la restricció que els segments no es poden tallar (3). En aquest cas, donats n punts sobre una circumferència, quants segments es poden traçar?

Si els segments es poden tallar, a l'interior del cercle es determinen punts de tall (4). Donats n punts sobre la circumferència, quin és el nombre màxim de punts de tall que es determinen? Aquest problema és una miqueta més difícil que els anteriors. Tanmateix, hi ha una manera molt bonica i elegant de resoldre'l (i simple quan s'ha trobat!).

Arribats aquí, i a tall de reflexió al voltant dels diferents problemes plantejats, ens podem preguntar (5): Quina diferència hi ha, quan n creix, entre el tipus de creixement del nombre màxim de segments sense tallar-se, el nombre màxim de segments (si acceptem que es poden tallar) i el nombre màxim de punts de tall que es determinen?

Seguim donat voltes a la situació i compliquem-la una mica més. Quan tracem segments que uneixen n punts situats en una circumferència, aquells van dividint el cercle en regions. Si els segments no es poden tallar, determinar el nombre màxim de regions és prou senzill (i es pot relacionar fàcilment amb el nombre de segments), però si es tallen la cosa es complica força (6). Sabrieu trobar quin és el nombre màxim de regions que es determinaran a partir de n punts? (Aneu en compte a fer una generalització prematura a partir d'uns pocs casos particulars; a vegades, les aparences enganyen!!).

Acabaré l'article amb un problema que fa uns dies em va plantejar l'Isabel Sellas, professora de la universitat de Vic, que tot i no ser exactament de punts i rectes, sino tan sols de segments, té tota la pinta d'un clàssic, i bonic, problema geomètric de construcció (7): quina és la condició que han de verificar les longituds de les altures d'un triangle per tal que el triangle

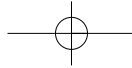
es pugui construir? Si coneixem les longituds de les tres altures d'un triangle, com podem construir-lo? Trobar la condició no costa gaire, construir el triangle donades les altures és més entretingut, a menys que sigueu una mica experts en la resolució de problemes de geometria.

Mentre acabava de repassar aquest article he conegut la trista notícia de la mort del professor Miguel de Guzmán, una persona que més enllà dels seus grans coneixements matemàtics, seguia engrescant a petits i grans amb els seus descobriments i la seva afició als bons problemes, i treballava incansablement per una educació matemàtica millor a tots els nivells. Curiosament, l'últim contacte que vaig tenir amb ell és encara molt recent; va ser, precisament, al voltant del joc que ha motivat aquest article, i havíem quedat per parlar-ne en una trobada d'estalmat a Burgos que es feu tres dies més tard de la seva mort. Ell m'havia fet conèixer, entre d'altres, el llibre *Mathematical Circles*, on es plantejava el joc, juntament amb tants altres problemes "elementals" interessants. Espero poder dedicar-li un proper article, tot recordant alguns dels problemes que he conegut llegint els seus llibres i que, a més de disfrutar, m'ha ajudat a pensar una mica millor.

Comentaris i solucions als problemes de l'article anterior (BIAIX 21, desembre 2003).

Com que he rebut alguns comentaris i també peticions de solucions dels problemes anteriors, cosa que sempre és d'agrair ja que vol dir que hi ha gent que hi ha pensat segurament més d'una hora, m'ha semblat oportú fer alguns comentaris i donar les solucions dels problemes.

1. Varen participar en la compra 7 persones i varen adquirir en total 53 articles. L'interès d'aquest senzill problema és que no cal recórrer al planteig d'equacions, ja que resulta que si totes les persones posen una moneda menys el nombre total de monedes disminuirà precisament en 7.
2. Es pot assegurar que si el nombre total de signes és senar no serà possible tenir igual nombre de signes positius que negatius.



Això passa si a la primera fila tenim 1, 2, 5, 6, 9, 10,... signes, és a dir, si la quantitat de signes de la primera fila és de la forma $4n + 1$ o bé $4n + 2$. Pel que fa a la segona part del problema, tal com ja dèia a l'enunciat, no conec un mètode general que doni una solució per tots aquells casos en què sembla que aquesta existeix. Tanmateix, he observat que sembla possible trobar una solució per una quantitat de signes a la primera fila que sigui de la forma $4n+3$, que generi una solució pel nombre següent. Aquí teniu un exemple, per $n = 11$, d'una solució per aquest cas que genera automàticament una solució pel següent, $n = 12$. El problema és passar de 12 a 15 (i en general de $4n$ a $4n+3$) que és el següent nombre que admet solució.

$n = 11$

```

- + - + - - + - + + -
- - - - + - - - + -
+ + + - - + + - -
  + - - - - - -
    - + + + +
      - + + +
        - + +
          - +
            -
    
```

No cal dir que si algú troba una solució general, o té alguna idea brillant sobre aquest problema que sembla no resolt, li agrairé molt que me la faci arribar i "prometo" comentar-la en un futur article.

3. Aquest interessant problema té una solució prou senzilla si el panell rectangular té una de les dues longituds senar. Suposem que el nombre de columnes (files) és senar; en

aquest cas n'hi haurà prou en canviar una sola vegada tots els llums de la primera fila (columna). Quan tant el nombre de files com el de columnes és parell, caldrà canviar tots els llums, una vegada cadascun. Es pot raonar que si es canvien una vegada tots els llums d'un quadrat de 2×2 , aquests quedaran tots canviats i tota la resta de llums quedaran igual.

4. Joc (I). És clar que si logrem que el resultat de la resta sigui 1, el nostre contrincant perdrà la partida. Llavors, començant amb el 30 (i amb qualsevol altre nombre parell) hi ha una estratègia guanyadora pel primer jugador, que consisteix a triar un divisor senar (per qualsevol nombre n'hi ha almenys un, l'1); al restar quedarà un nombre senar, i després de la jugada del segon el resultat de la resta tornarà a ser parell (ja que un nombre senar no té cap divisor parell). Si el nombre inicial és senar, ara la mateixa estratègia permetrà guanyar al segon, ja que el primer haurà de deixar un resultat parell i el segon podrà aplicar l'estratègia del cas anterior.

5. Joc (II). Haureu trobat la solució en l'article d'avui, ja que aquest és el joc que l'ha motivat.

6. Joc (III). Si un jugador aconsegueix deixar a l'adversari un múltiple de tres, l'altre no podrà guanyar (ja que cap potència de 2 ho és). Així, el primer jugador pot guanyar restant a 1000 una potència de 2 que sigui de la forma $3n + 1$ (com 1, 4, 16, 64 o 256), amb la qual cosa la resta serà múltiple de 3; el segon jugador, faci el que faci, no podrà deixar un múltiple de 3, mentre el primer, en la següent jugada, podrà repetir l'estratègia.

