

Recensions

Los orígenes de la Geometría Analítica.

Pedro Miguel González Urbaneja

Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife, 2004.

ISBN 84-607-9668-X , 178 pàgines

Succeeix, amb freqüència, que no valorem el que posseïm i gaudim de forma quotidiana. Després de la lectura d'aquesta obra aprenem a valorar i a gaudir de la Geometria Analítica com a eina fonamental de la Matemàtica i de l'Educació matemàtica. La força algebraica inexorable de la Geometria Analítica aporta simplificació, generalització, mecanització, unificació, flexibilitat, versatilitat, claredat, economia, brevetat i difusió, i es converteix en el llenguatge universal de les ciències. L'enginy i la imaginació que exigiria la comprensió de l'obra d'Euclides són substituïts per la simplicitat de procediments algorísmics automàtics. La notació cartesiana es va convertir en definitiva. *La Geometria* de Descartes és el primer text matemàtic en el qual un estudiant actual no trobaria dificultats amb la notació.

Tal com escriu l'autor (pàg. 164): la Geometria Analítica cobreix una sèrie d'aspectes essencials que, de forma simplificada, ressenyem en l'ordre d'aparició històrica:

1. La introducció de les coordenades.
2. El traçat d'una corba construïnt ordenades a partir d'abscisses.
3. L'aplicació de l'Àlgebra simbòlica als problemes geomètrics.

4. La derivació d'equacions dels llocs geomètrics i la construcció geomètrica de les solucions d'equacions.
5. L'estudi de les corbes donades per les seves equacions lineals i quadràtiques.
6. La representació gràfica d'una corba donada mitjançant l'expressió analítica funcional.
7. La derivació de fórmules fonamentals per a resoldre problemes sobre punts notables, rectes, plans, angles, paral·lelisme, perpendicularitat, distàncies, àrees, etc.
8. La classificació general de corbes i superfícies de segon ordre.

Amb les limitacions que suposa l'absència d'Àlgebra simbòlica en la Geometria grega, el primer punt va ser cobert pels grecs, en particular Menecme, Apol·loni i Papos; el segon, pertany al treball d'Oresme; Vieta va desenvolupar el tercer; Descartes es va ocupar del quart punt i va considerar breument alguns aspectes del cinquè; Fermat es va centrar en el cinquè apartat i va resoldre alguns problemes relacionats amb el quart; el sisè va ser àmpliament cobert per Euler; el setè és iniciat per Euler i continuat per Lagrange, Monge i Lacroix; i el vuitè, pel que fa a les còniques, és començat per De Witt, Wallis i Stirling, tancat per Euler, i pel que fa a les quàdriques àmpliament estudiat per Euler i Monge.

Aquesta és la línia històrica que segueix González Urbaneja. El llibre parteix de l'Àlgebra Geomètrica –estructura que adquireix la Matemàtica grega com a conseqüència de la crisi de fonaments que va implicar l'aparició dels incommensurables—. De fet, la introduc-

ció titulada: *De l'Àlgebra Geomètrica a la Geometria Analítica* és ben descriptiva del contingut i podria ser el propi nom del llibre. Partint de la primera, el text es va desenvolupant amb l'argument següent: L'Anàlisi Geomètrica grega utilitzava un equivalent de les coordenades, però només emprava Àlgebra Geomètrica. *L'Art Analítica* de Vieta desenvolupa l'Àlgebra Simbòlica però no usa coordenades. En vincular ambdós instruments –coordenades i Àlgebra literal– Fermat i Descartes enllumenen la Geometria Analítica establint un pont per a transitar entre la Geometria i l'Àlgebra, fet que permet associar corbes i equacions, a còpia d'aplicar l'Anàlisi algebraica de Vieta als problemes de llocs geomètrics d'Apol·loni i Papos, definits, en un sistema de coordenades, per una equació indeterminada en dues incògnites. Continua el relat amb els ulteriors desenvolupaments de la Geometria Analítica i la seva evolució posterior fins a la forma acadèmica prèvia a la introducció del punt de vista vectorial.

Aquest llibre rastreja, doncs, els orígens de la Geometria Analítica des dels primers estadis de la Matemàtica hel·lènica, però, sense menystenir la important intervenció de Fermat, té sobretot com a objectiu *investigar les arrels* de la Geometria Analítica en el pensament cartesià. Per això dedica una gran extensió, en el capítol vuitè, a la important qüestió de l'ancoratge de *La Geometria* de Descartes en la seva obra filosòfica, en particular en *El Discurs del Mètode* i en les *Regles per a la direcció de l'esperit*, obres on se situa la metodologia cartesiana, especialment els preceptes de l'Anàlisi i la Síntesi, que Descartes aplica de forma constant en *La Geometria*. S'estudien els diversos mètodes, es comparen els uns amb els altres i s'intenta clarificar el suport que cadascun rep dels precedents i atorga als posteriors, i en particular es dilucida la influència de cada fita geomètrica o algebraica sobre la *trobada* de Fermat i Descartes. En aquest sentit, un dels capítols més interessants i aclaridores és el dedicat a un ampli estudi comparat de *La Geometria* de Descartes i la *Isagoge* de Fermat.

El text inclou aspectes d'Història de la Geometria grega i de l'evolució de l'Àlgebra

que interessen a la Geometria Analítica, i que, per comparança, ens adverteixen que el que enllumena Fermat i Descartes és una mica nou i revolucionari. Per primera vegada en la història es té el convenciment d'haver superat als antics grecs en algun aspecte.



L'obra presenta l'evolució històrica de l'Anàlisi Geomètrica (Hipòcrites, Plató, Apol·loni, Papos, Vieta, ...) del qual la Geometria Analítica hereta no només el nom, sinó també els procediments, com a eina geomètrica que

permet fondre en un sol acte el descobriment i la demostració, mitjançant una potent metodologia geomètrica i algebraica que reemplaça les complexes i enginyoses construccions de la rígida Àlgebra Geomètrica dels grecs per sistemàtiques operacions algebraiques. Es converteix així en un poderós instrument d'investigació i d'exploració, amb el qual Fermat i Descartes resolen amb plenitud heurística, de forma elegant, ràpida, brillant i prodigiosa, nombrosos problemes, clàssics i moderns. Fermat resol força qüestions de llocs geomètrics, extrems, tangents i quadratures; Descartes troba les normals a algunes corbes, i el famós problema de Papos, que s'havia resistit al llarg de la història. En aquest sentit l'obra dedica un important capítol a la importància rellevant que va tenir l'aparició de la Geometria Analítica en el descobriment i desenvolupament de l'Anàlisi Infinitesimal.

El llibre se sustenta de forma essencial en els textos originals dels matemàtics grecs (especialment Euclides, Apol·loni, Diofant i Papos), Oresme, Vieta, i sobretot Fermat i Descartes, així com en altres documents de filòsofs (Plató, Spinoza, Stuart Mill, Spengler, ...), matemàtics (Euler, D'Alembert, Monge, Lagrange, Lacroix, ...) i historiadors i filòsofs de la ciència (Montucla, Tannery, Loria, Ver Eecke, Brunschvicg, Bell, Boyer, Vera, Kline, Hull, Dunhan, ...), d'on sorgeixen nombroses citacions –extretes directament per González Urbaneja i referenciades, amb autor, text i pà-

gina- ressenyades en la generosa bibliografia, que inclou, al costat de les fonts, tant obres essencials com d'altres de divulgació científica, amb indicació dels capítols que interessin a cada tema.

L'obra de González Urbaneja permet una doble lectura gràcies a les nombroses i originals il·lustracions, que van acompanyades d'amplis textos marginals emfatitzats. Aquests textos constitueixen un resum sumari del contingut general i, a la vegada, són interessants centres d'atenció i d'interès.

Els aspectes ressenyats i d'altres que no hem comentat ens permeten assegurar que l'obra de González Urbaneja és una interessant aportació a la historiografia de la Geometria Analítica.

Alfredo Quintana Zamora, IES Sant Josep de Calassanç, aquintan@pie.xtec.es

Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos:

Para niños y niñas de 6 a 12 años

Àngel Alsina i Pastells

Editorial Narcea, Madrid, 2004

ISBN: 84-277-1453-X, 156 pàgines



En el moment present en què el debat entre continguts i competències bàsiques és de gran actualitat, aquest llibre ofereix un enfocament renovat de l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques a l'etapa de primària. Tenint en compte les necessitats que tenen

els nens i nenes de 6 i 12 anys per aprendre significativament, es plantegen diversos recursos manipulatius i jocs per tal de treballar competències matemàtiques relacionades amb els grans blocs temàtics de l'etapa: el raonament lògic, els nombres i operacions, la geometria, la mesura i l'estadística i la probabilitat. Es

tracta de recursos i jocs que han de permetre aproximar el treball de matemàtiques a la vida quotidiana de l'alumne.

La significativitat de l'aprenentatge matemàtic té molt a veure, tal com diu l'autor, amb l'habilitat i l'oportunitat d'aplicar els aprenentatges construïts a l'aula en situacions de la vida real. L'aspecte formatiu de les matemàtiques s'ha de combinar amb l'aspecte funcional fins el punt d'arribar a interpretar conjuntament ambdós aspectes. L'articulació del currículum per mitjà de competències ha de facilitar aquesta interpretació conjunta. D'acord amb això, l'objectiu principal del llibre és oferir a mestres i professors recursos i activitats que contribueixin a millorar l'adquisició de competències matemàtiques i potenciar la reflexió sobre aquestes adquisicions.

Potser ja coneixem alguns recursos clàssics com el tangram, el geoplà, l'àbac o el dòmino, però en aquest llibre hi trobarem una nova aproximació. El tangram i els altres materials no són només recursos manipulatius que serveixin per a l'aprenentatge de continguts i procediments de geometria, càlcul, etc. Les activitats que se suggereixen per a treballar amb aquests materials posen un especial èmfasi en el caràcter lúdic de la matemàtica i en les connexions amb situacions de fora de l'aula. La gran quantitat de jocs descrits mostren l'interès per copsar i mantenir la motivació de l'alumnat des del doble principi lúdic-manipulatiu, fonamental a l'etapa de primària.

Cadascun dels cinc apartats temàtics del llibre es divideix en tres parts. La primera part del llibre fa una breu aproximació conceptual i destaca les competències matemàtiques més importants que s'escullen i que hauran de ser completades per cada mestre a cada aula. A la segona part s'exposen criteris metodològics i consells pràctics per tal de dur a terme les activitats i els jocs dels diferents blocs temàtics. La tercera part és la més extensa i conté nombrosos recursos manipulatius i jocs, amb una relació de totes les activitats que es poden realitzar amb cada recurs seqüenciades per edats. Cal indicar que totes les activitats que s'esmenten han estat experimentades prèviament amb nens i nenes de diferents escoles.

A l'apartat de raonament lògic, per exemple, es proposen activitats a partir d'un exemple de material lògic estructurat. Prèviament, s'han llistat les principals competències que es pretenen treballar a través d'una gestió adequada d'aquest material, i que els nens i nenes haurien d'adquirir de forma progressiva. La primera competència consisteix en analitzar i comprendre missatges orals, gràfics i escrits que expressin situacions a resoldre tant de la vida real com de jocs i imaginàries. La segona competència consisteix en desenvolupar la curiositat per l'exploració, la iniciativa i l'esperit de recerca usant activitats heurístiques basades en el tempteig i en la reflexió. I així fins a cinc competències més. Els criteris metodològics i els consells pràctics que segueixen són molt encertats i recomanem llegir-los amb calma. En general, aquest és un llibre que concreta amb claredat i rigor el concepte de competència matemàtica.

Núria Planas, Universitat Autònoma de Barcelona. Nuria.Planas@uab.es

Razonamiento Algebraico y su didáctica para maestros

Juan Díaz Godino i Vicenç Font

Editorial Universidad de Granada, Granada 2003

ISBN: 84-932510-7-0, 60 pàgines

<http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/indicerazonalgebraico.htm>



Aquest llibre forma part del Projecte *Edumat Maestros*. Aquest projecte ofereix una visió general i a la vegada exhaustiva de l'educació matemàtica. Estem davant d'un espai de reflexió i estudi sobre les matemàtiques i sobre instruments conceptuals i meto-

dològics de didàctica de les matemàtiques. Es tracta d'un material de gran interès, tant per als futurs mestres com per a tots aquells que es dediquen a la formació del professorat.

El llibre està organitzat en tres parts. Comença amb un capítol titulat *Análisis de problemas sobre razonamiento algebraico en primaria*, que té per objectiu mostrar que a l'etapa de primària els alumnes s'enfronten amb problemes que, per a la seva resolució, necessiten d'un raonament quasi algebraic (ús de símbols per a designar objectes, equacions, fórmules y patrons). Fins i tot, s'hi poden trobar elements teòrics que suposen l'inici d'una reflexió sobre l'estructura algebraica dels conjunts i operacions amb nombres. Tal és el cas dels enunciats generals de les propietats commutativa, associativa i distributiva de les operacions aritmètiques i la seva aplicació a la resolució de problemes.

Un altre factor que fan observar els autors és que la introducció de la informàtica a la primària implica que, en determinades activitats, els alumnes comencen a utilitzar un llenguatge que podem qualificar com quasi algebraic (per exemple l'ús d'un full de càlcul).

A la segona part, *Conocimientos matemáticos*, després de considerar insuficient i limitada la visió tradicional de l'àlgebra escolar que s'ha anomenat "aritmètica generalitzada" (aquella que considera l'àlgebra simplement com una manipulació de lletres que representen nombres no especificats), els autors proposen una visió ampliada de l'àlgebra com a instrument de modelització matemàtica. Aquesta és la que, segons els autors, es pot i s'ha d'anar construint progressivament des dels primers nivells educatius. Per aconseguir-ho, els autors consideren que cal iniciar des de l'educació primària el treball amb els processos de simbolització, expressió de relacions, identificació de patrons, etc.

En aquest capítol hi ha una interessant reflexió sobre els sistemes de signes matemàtics. Segons els autors el llenguatge matemàtic té una doble funció: 1) *representacional*: ens permet designar objectes i 2) *instrumental*: és una eina per a fer el treball matemàtic. Per tant, s'ha de ser molt conscient que el valor instrumental pot ser molt diferent segons que es trac-

ti de paraules, símbols, icones, gràfics, etc. Per exemple, la utilització de representacions icòniques permet introduir en l'educació primària un tipus de raonament que es pot qualificar d'algebraic, i que no seria possible realitzar en el cas d'haver optat per una representació completament simbòlica com, per exemple, les equacions.

Un altre aspecte que queda molt ben explicat en el llibre és el procés que comença considerant els símbols com a representacions d'objectes i acaba considerant els símbols com a objectes sobre els quals es poden realitzar accions.

A la tercera part del llibre, *Conocimientos didácticos*, es fa una anàlisi dels currículums de l'estat espanyol i dels Principis i Estàndards 2000 del NCTM, del desenvolupament cognitiu necessari pel raonament algebraic, de les etapes en la progressió en l'aprenentatge que la investigació didàctica ha documentat, i d'alguns dels conflictes associats. Per acabar, es proposen un seguit de recursos i activitats que poden ajudar a desenvolupar el raonament algebraic dels alumnes de primària.

Malgrat que el llibre està pensat per a futurs mestres de primària, la seva lectura també pot ser molt útil a tot el professorat que treballa en el primer cicle de l'ESO.

La distribució d'aquest llibre, juntament amb els altres que formen el projecte Edumat Maestros es fa per internet <http://es.groups.yahoo.com/group/edumat-maestros>. Juntament amb la lectura atenta d'aquest llibre, també recomanem la participació activa en el fòrum Edumat Maestros [edumat-maestros@yahoogroups.com] obert per Juan Díaz Godino, un dels autors, amb l'objectiu d'intercanviar idees i coneixements entre els educadors matemàtics dels països de parla hispana. La participació en el molt actiu grup edumat-maestros permet rebre i donar informació sobre aquells temes d'educació matemàtica en els quals estem especialment interessats. La possibilitat de debatre els continguts d'aquest llibre en aquest fòrum és un bon exemple de l'enorme utilitat que ens ofereix la tecnologia actual a l'àrea de didàctica de les matemàtiques.

Per acabar només comentar que en l'anterior número de la revista BIAIX hi podreu trobar la recensió d'un dels altres llibres d'aquest projecte, ens referim al llibre *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros*.

Neus Inglada i Rodríguez, IES Ernest Lluch i Martí. ninglada@pie.xtec.es

PROBLEMATIKS

