Per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu

Universitat Autònoma de Barcelona, Jordi.Deulofeu@uab.es

Els nombres a més a més d'un dels conceptes fonamentals de les matemàtiques, són una font inesgotable de problemes i curiositats. Sense anar més lluny resulta que el 24, que correspon al número de la revista BIAIX en el qual es publica aquest article, és un nombre força interessant, i em sembla que, sense necessitat de forçar massa les coses, servirà per omplir de contingut un article com aquest. A la vida quotidiana el 24 el trobem en les dues dotzenes, i millor encara a les dotzenes de coses que van aparellades, com els mitjons o els guants, però és en la mesura del temps on té tot el protagonisme ja que ens indica la quantitat d'hores d'un dia. És clar que, com diu en Claudi Alsina (*Del número 0 al 99*, Graó, 1993), el 24 està força disgustat amb els rellotgers ja que ha de suportar el fet que en ser les "24 hores" els rellotges digitals marquin les "0 hores" i per tant ell no apareix mai; tampoc amb el rellotges analògics les coses li van millor, ja que en aquest cas tot el protagonisme és pel 12.

Si, com hem vist, a la vida quotidiana tot i la seva presència el 24 és un nombre que està una mica marginat, al món de les matemàtiques les coses li funcionen força millor. D'entrada apareix en moltes taules de multiplicar, ja que es tracta d'un nombre amb una quantitat elevada de divisors (8), més que tots els nombres que el precedeixen, i és el quart nombre abundant (la suma dels seus divisors propis és superior al nombre), després del 12, el 18 i el 20, tots ells amb 6 divisors. A més a més, resulta que 24 és divisible per la suma, per la diferència, pel producte i pel quocient de les seves xifres. Quins altres nombres de dues xifres tenen aquesta mateixa propietat? També 24 es pot escriure com a suma i com a producte de tres nombres consecutius. A quins nombres els passa això?

Una altra propietat rellevant del 24 és que es tracta del resultat d'un factorial (4!), en realitat l'únic de dues xifres (3! = 6, 4! = 24, 5! = 120). Per cert, si observeu el creixement dels factorials, veureu que després de 5! = 120 i 6! = 720, tots dos amb tres xifres, 7! té 4 xifres, 8! té 5 xifres i així successivament, fins que el creixement és prou gran per començar a saltar certs ordres de magnitud.

Si busquem propietats una mica més amagades, resulta que 24 és el menor nombre tal que el producte dels seus divisors propis és un cub: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 = 24^3$, propietat que es pot deduir ràpidament si considereu el nombre de divisors. D'altra banda, David Wells a *Curious and Interesting Numbers*, Penguin, 1986, un llibre on trobareu una pila de coses interessants sobre els nombres, assenyala que si sumem els quadrats de l'1 al 24 el resultat és també un quadrat: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 24^2 = 70^2$. Però a més, resulta que és la única suma de quadrats consecutius començant per 1 que és un quadrat (és clar que si no comencem per 1 hi ha moltes solucions, per exemple, $3^2 + 4^2 = 5^2$, o bé, $18^2 + 19^2 + ... + 28^2 = 77^2$). Per tant, el vintiquatrè nombre quadrat-piramidal (així podem anomenar els nombres que són suma de quadrats consecutius començant per 1, ja que es poden imaginar com a piràmides de base quadrada) és l'únic que és un quadrat.

Fins aquí hem exposat algunes curiositats i propietats del nombre 24, el protagonista de l'article d'avui. Ben segur que cadascú de vosaltres, si penseu una mica, podreu trobar-ne d'altres igualment interessants. I posats a pensar, ara arriba el torn dels problemes, alguns d'ells també directament relacionats amb el 24, però altres certament no tant. La inspiració i algunes bones idees d'aquests problemes provenen del *Calendario*

Matemático 2006, un reto diario, publicat per la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, de Mèxic i que em va regalar Teresa Valerio, revisora de la publicació i estudiant del programa de doctorat del meu departament. En tot cas la selecció d'avui és força assequible i són problemes que majoritàriament es poden plantejar a alumnes de secundària.

Problema 1

Expressar 24 amb quatre quatres i les operacions que vulgueu és força senzill: $4 \cdot 4 + 4 + 4 = 24$. Per quins altres nombres d'una xifra, utilitzats exactament quatre vegades, és possible expressar 24? D'entrada sembla que no hi haurà solució per gaires dígits, però treballant-hi una mica, utilitzant operacions una mica més "sofisticades" que les quatre operacions elementals, i recordant les propietats del 24 que acabem de comentar, s'acaba trobant almenys una solució per a cadascun dels dígits, del 0 al 9. Si, fins i tot hi ha una solució pel 0, que jo no havia sabut trobar i que, a partir de la trobada per l'1, m'ha facilitat l'amic Xavier Valls.

Problema 2

Partim d'un tauler de 3 x 3 amb els nombres indicats al dibuix. A cada pas es canvien els nombres de les 9 caselles d'acord amb la regla següent: cada nombre es canvia pel resultat de multiplicar tots els nombres que ocupen les caselles que tenen un costat en comú amb la casella ocupada pel nombre. Després de 24 passos, quina serà la composició del tauler? I després de 2006 passos?

1	-1	1
1	1	1
1	1	1

Problema 3

Tenim tres piles amb 11, 7 i 6 monedes a cada pila respectivament i volem aconseguir que les tres piles siguin totes iguals, traspassant monedes d'acord amb les regles següents: a una pila només se li poden afegir tantes monedes com tingui en aquell moment i les monedes afegides han de provenir totes d'una mateixa pila. Quin és el menor nombre de moviments que pots fer per obtenir tres piles iguals?

Problema 4

Una habitació quadrada està enrajolada amb rajoles també quadrades i totes iguals. Les rajoles que formen les dues diagonals de l'habitació són negres i totes les altres són blanques. Si hi ha 101 rajoles negres, quantes rajoles blanques hi ha?

Problema 5

El nombre 3 es pot expressar de quatre maneres diferents com a suma d'enters positius: 3, 1 + 2, 2 + 1, 1 + 1 + 1 (observeu que considerem expressions diferents les formades pels mateixos nombres en ordres diferents). De quantes maneres es pot expressar el 24 com a suma d'un o varis enters positius? I un nombre enter positiu qualsevol? Conjecturar la solució analitzant els primers casos es força senzill. Demostrar-ho costa una miqueta més, però ens porta a una bonica i coneguda propietat dels nombres combinatoris.

Per ser coherent amb la primera part de l'article, en lloc de proposar cinc problemes n'hauria d'haver proposat 24. El nombre d'avui, però, correspon a una quantitat massa elevada per les pretensions i l'extensió d'aquest article. Com sempre, espero que algun dels problemes proposats us hagi agradat, i que passeu una bona estona resolent-los.