

F. GRAELL I DENIEL

SOBRE LES CONCEPCIONS ARITMETITZANTS
DELS NOMBRES IRRACIONALS

QUADERNS DE FILOSOFIA

3

F. GRAELL I DENIEL

SOBRE LES CONCEPCIONS ARITMETITZANTS
DELS NOMBRES IRRACIONALS

3

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 1998

1ª edició: desembre 1998
ISBN: 84-923682-2-5
© F. Graell i Deniel

CONTINGUT

Per què creiem convenient el repàs de les concepcions aritmetitzants de l'irracional, 7. Sobre la utilitat d'unes tals concepcions, 11. Sobre la definició de nombre racional de Georg Cantor, 12. Sobre el «tall» de J.W.Richard Dedekind, 17. Sobre el valor lingüístic d'unes tals teories, 21.

Al segle XIX aparegué l'opinió crítica que hom encara no havia *demonstrat* que es podien efectuar sobre els nombres irracionals les operacions definides en aritmètica per als nombres racionals. Una tal posició es podria exemplificar amb els mots de l'estudi, ja clàssic, de A.Pringsheim i J.Molk, quan diuen a propòsit de la representació mètrica dels nombres: *«Fins aquí tot és clar en la doctrina mètrica, però heus ací la dificultat. No n'hi ha prou, a generalitzar els nombres naturals, definint convenientment nombres que els inclouen com a casos particulars; cal mostrar a més a més que hom té dret d'efectuar, sobre els nombres generalitzats, les diverses operacions de l'aritmètica segons regles determinades, per exemple segons les regles establertes per als nombres naturals. Ara bé, aquí la demostració és impossible. Hom ha trigat molt de temps a adonar-se'n; tanmateix la dificultat era davant dels ulls, però hom ha cregut poder-la esquivar, tot establint la hipòtesi gratuïta que no solament, a cada vector, li correspon un nombre, cosa que resulta de la mateixa definició del nombre, sinó que inversament, a cada símbol obtingut per combinar, seguint les regles de l'aritmètica, els algorismes que representen els nombres, li correspon també necessàriament un vector, amb la qual cosa la demostració cercada seria evidentment fàcil. Als qui dubtaven de la legitimitat d'una tal hipòtesi, els uns els responien que aquest recíproc tenia un caràcter d'evidència geomètrica que dispensava de qualsevol esclariment, d'altres pretenien d'esclarir la qüestió per mitjà de consideracions d'ordre metafísic sobre la continuïtat, la noció de límit i els infinitament petits, que no aconseguien finalment més que enfosquir-la més. Perquè la demostració de la hipòtesi és impossible, és a un postulat que cal demanar ajut, com ho han fet veure primerament G.Cantor i, quasi simultàniament, R.Dedekind. És sols en virtut d'un postulat que, a qualsevol nombre representat per un dels algorismes considerats, li correspon un vector. Sens dubte, completada per aquest postulat,*

la doctrina mètrica torna a ser rigorosa, però llavors deixa de ser lluminosa, com una qualsevol doctrina en l'exposició de la qual cal fer intervenir postulats estranys al seu objecte. Hom veurà més endavant com s'ha cercat d'evitar un tal escull [Postulat d'Ascoli].

Tanmateix, uns quants anys abans que G.Cantor no hagués fet evident tot això, alguns matemàtics, preocupats justament de les dificultats que acabem d'assenyalar i de la manca de rigor, i de claretat i tot, que oferien les demostracions de teoremes que sostenen tota l'Anàlisi, cercaren, independentment els uns dels altres, d'edificar una teoria nova enterament deslligada d'una qualsevol consideració que impliqués magnituds concretes, cosa que els portà a aprofundir la noció de nombre irracional. Arribaren a penetrar en la veritable natura d'aquests nombres ...»¹.

Abans d'apropar-nos una mica a l'aritmètzació de l'irracional, caldria assajar d'entendre millor l'abast d'unes tals crítiques: l'aritmètzació de la matemàtica al llarg del segle XIX ha esdevingut, sembla, irreversible; malgrat tot no aconseguiríem versemblantment un clar contrast entre les justificacions de l'extensió de les operacions aritmètiques sense provar d'exemplificar les unes posicions i les altres.

Primerament, per exemple, hauríem de considerar millor el sentit de les paraules del text d'A.Pringsheim i de J.Molk: en efecte el text defensa la impossibilitat d'una demostració de les operacions aritmètiques per als nombres generalitzats *perquè* no és possible d'establir una relació biunívoca entre uns tals nombres i els vectors (caldria un postulat per a la direcció que va dels

¹A.Pringsheim, J.Molk, «Nombres irrationnels et notion de limite», pàgs.146-147, *Encyclopédie des sciences mathématiques*, tom I, vol.I: fascicle I, pàgs.133-160; fascicle II, pàgs.161-208.

nombres als vectors); i les noves teories de l'irracional voldrien edificar-se independentment de les exemplaritzacions de magnitud.

En efecte semblaria que argumentacions d'un tal caire podrien prestar-se a alguna confusió: perquè l'axioma que faria correspondre un vector a cada nombre (en una noció generalitzada) -- que tal qual és de Georg Cantor -- no hauria estat introduït a fi de demostrar les operacions amb nombres (racional o irracionals), sinó per a aplicar-los a les consideracions de magnituds, i degut al fet que Cantor hauria establert prèviament una teoria numèrica de l'irracional amb independència de les magnituds, teoria que incorporava, és clar, la seva justificació d'operacions, i per tant es fa del tot comprensible la necessitat d'un axioma².

²Ometem la primera presentació de l'irracional de Cantor (cf. «Über die Ausdehnung eines Satz aus der Theorie der Trigonometrischen Reihen», *Math. Annalen*, vol.5 (1872), pàgs.123-132, incorporat a *Gesammelte Abhandlungen. Mathematischen und philosophischen Inhalts*, Hildesheim, Georg Olms, 1966, pàgs.92-102) perquè més tard la superà amb una segona consideració que esmentarem més avall. En aquell primer tractament presenta els irracionals com a límits (després s'adonarà que no pot ser tal qual així) i tota la teoria té un tractament formal. Per això hi esmenta la possibilitat d'aplicar-la a magnituds linials: l'ús de nombres racionals per als punt de línies en coordenades cartesianes, i l'ús dels irracionals, tal i com han estat definits, per a tots aquells punts d'una línia que són coneguts per construcció; és a dir, podem adjudicar un nombre a tot allò que es pot construir geomètricament. Però prenent ara l'altra direcció, la que va dels nombres a les magnituds, afegeix: «*Per a completar la connexió exposada en aquest paràgraf, del camp de les magnituds numèriques definides en el paràgraf anterior, amb la geometria*

D'altra banda la introducció d'un axioma per part de Dedekind caldria valorar-ho versemblantment més aviat com la d'un axioma geomètric en una primera accepció, en tant que voldria oferir un model per a la continuïtat d'una magnitud linial on es reflectís el tall del nombre irracional³: no es tractaria tampoc aquí d'una justificació de les operacions amb irracionals, que, com en Cantor, tindrien llur autonomia assegurada perquè Dedekind assumiria la independència del nombre respecte de la magnitud.

Per tant la impossibilitat de demostrar les operacions aritmètiques per als nombres irracionals no podria provenir de la necessitat d'un axioma avalador que correspon una magnitud a un nombre, axioma imprescindible si hom ha pres una teoria numèrica autònoma, quan serien les pròpies teories aritmetitzants dels irracionals, que garanteixen totes les operacions aritmètiques (i potser de l'anàlisi), les que el formulen. Més aviat, i com digué Dedekind a *Stetigkeit und irrationalen Zahlen*, és perquè mai no s'hauria demostrat, per exemple, que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, que hom cregué necessària una revisió aritmetitzant de l'irracional; en conjunt hom

de la línia recta tan sols cal afegir un axioma que estableixi simplement que també, en direcció contrària, a cada quantitat numèrica li correspongui un punt determinat d'una recta, la coordenada del qual és igual a aquella quantitat numèrica, i certament en el mateix sentit que hem esclarit en el present paràgraf.

Anomeno aquesta proposició un axioma perquè té com a propi no poder-se demostrar universalment.

Llavors a través seu es guanya també consegüentment una certa objectivitat per a les quantitats numèriques, de la qual tanmateix en són totalment independents» (loc.cit. pàg.97).

³cf.més avall.

en sentí la necessitat per tal de poder demostrar l'extensió de les operacions aritmètiques als nombres reals.

D'aquí que hi hagi de fet assumptes diversos i que potser fóra convenient de no imbricar; (1) l'estudi de l'accepció en què afirmem que abans del segle XIX no s'hauria demostrat el càlcul radical que s'usava; (2) la possible exemplificació d'un tal càlcul (fins i tot admetent que no s'hagués demostrat com a resultat numèric), cosa que no tindria cap punt de contacte amb les problemes derivats de l'arimetització (i de la necessitat d'un axioma) ni amb els derivats d'una possible demostració del propi càlcul; (3) la possible exemplarització parcial de les resultants del càlcul radical quan això fos possible, amb el nou advertiment de la inexistència de contactes amb les conseqüències derivades de l'arimetització de l'irracional; (4) hauríem d'afegir abans com podríem avaluar un radical irracional, que no és cap nombre en l'accepció bàsica del mot, per tal que hom l'hagués pogut acceptar en un càlcul del tall de l'aritmètic; i (5) finalment caldria fer un cop d'ull a les pròpies teories arimetitzants de l'irracional.

Certament provarem de lliurar algunes indicacions per a cadascun d'aquests punts en successius treballs: ara bastarà de circumscriure's a (5), base de l'ús lingüístic amb el qual presentem avui dia els irracionals en els nostres manuals superiors de matemàtiques.

1. Hem de veure doncs l'abast de les aproximacions i definicions arimetitzants del nombre irracional que iniciaren Ch.Méray i G.Cantor a partir de sèries infinites, K.Weierstrass a partir de conjunts de nombres racionals (les quantitats numèriques, *Zahlengrösse*), i Dedekind a partir de la noció purament aritmètica de «tall» (*Schnitt*), segons les quals la concepció de l'irracional per l'anàlisi lliuraria quelcom més adient al conjunt del saber matemàtic en la mesura que el mer simbolisme d'una arrel no satisfaria prou les exigències d'una

definició rigorosa del nombre irracional, i en la mesura que hom s'adona que l'extensió de les operacions de l'aritmètica (per exemple) als irracionals no haurien estat tal qual demostrades.

Podria semblar en efecte que aquelles definicions de l'irracional tenen el seu suport en el desig exprés de fer de l'irracional un nombre en l'accepció, si és possible de dir-ho així, d'esgotar-ne la seva significació a partir dels nombres racionals, ja sigui com un terme últim de sèrie racional, com un conjunt de nombres racionals, com un tall enmig de racionals, etc., i cal admetre que no hi ha una altra manera de tenir-lo *de fet* com a resultant que en tant que aproximació racional; tot això esdevindria prou útil quan treballem *qua* matemàtics, permetria un estudi general de les propietats numèriques, obriria el camí a un discurs unitari i uniforme sense consideracions d'índole heterogènia, permetria l'assumpció sense problemes lògics d'irracionals del tall de π , i s'adiria amb una presentació rigorosa de les diverses classes de nombres, tal i com estem aconstumats en matemàtiques.

2. Caldria certament un estudi de cadascun dels iniciadors de les definicions aritmetitzants, i dels seus immediats seguidors (H.E.Heine, J.Tannery, O.Stolz, P.Bachmann, M.Pasch, etc.). Però a títol d'il·lustració potser seria convenient de traslladar algun dels textos capitals, per exemple el de la segona exposició de Georg Cantor⁴, inclòs en l'importantíssim treball *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, on modifica una mica el seu punt de vista anterior⁵, i on compara també les doctrines de K.Weierstrass i de R.Dedekind amb la seva. Cregué en efecte que

⁴*Math.Annalen* vol.21 (1883), pàgs.565-568; *Gesammelte Abhandlungen*, pàgs.183-190.

⁵cf.*Math.Annalen* vol.5 (1872), pàg.123; *ibíd.*, pàg.92.

la definició del primer hauria caigut en la falta lògica de pressuposar ja el nombre irracional a definir, i la del segon tindria el greu inconvenient que els nombres mai no es presenten en l'anàlisi en la forma de «talls» (hi hauria doncs força artificiositat), amb la qual cosa arribem a la tercera possibilitat, que és la seva pròpia, i que fa:

«Passo ara a la tercera forma de definir els nombres reals. També aquí es pren com a base un conjunt infinit de nombres racionals (a_v) de la primera potència, per al qual reclamo tanmateix una altra propietat que en la definició de Weierstrass; exigeixo que, en el supòsit d'un nombre racional ϵ tan petit com es vulgui, es poden separar un nombre finit de membres del conjunt de tal manera que els membres que romanen sobrants, i presos de dos en dos, tenen una diferència la quantitat absoluta de la qual és menor que ϵ . Cada conjunt (a_v) d'aquesta mena, que es pot caracteritzar també per l'exigència

$$\lim_{v \rightarrow \infty} (a_{v+\mu} - a_v) = 0$$

(per a un arbitrari μ)

l'anomeno una sèrie fonamental, i faig que li correspongui un nombre b que es defineix per aquella sèrie; per a aquest nombre àdhuc es pot usar amb encert el mateix signe (a_v) , tal com Heine ho ha proposat (cf. Crelles J., vol.74, pàgs.172), el qual en aquestes qüestions s'ha avingut als meus plantejaments després de moltes discussions orals. Una tal sèrie fonamental representa tres casos, com es dedueix rigorosament del seu concepte: o els seus membres a_v , per a valors suficientment grans de v , són segons la seva quantia absoluta menors que un nombre pressuposat arbitràriament; o aquelles mateixos són a partir d'un cert v majors que un nombre racional positiu ρ assenyalable

amb determinació; o són a partir d'un cert v menors que una quantitat racional negativa $-p$ assenyalable amb determinació. En el primer cas dic que b és igual a zero; en el segon que b és major que zero o positiu; en el tercer que b és menor que zero o negatiu.

Ara vénen les operacions fonamentals. Si (a_v) i (a'_v) són dues sèries fonamentals a través de les qual es determinen el nombres b i b' , es mostra que $(a_v \pm a'_v)$ i $(a_v \cdot a'_v)$ són també sèries fonamentals que determinen doncs tres nombres nous, que em serveixen com a definicions per a la suma i la diferència $b \pm b'$ i per al producte $b \cdot b'$. **Error! Marcador no definit.**

Si a més a més b és diferent de zero, d'acord amb la definició donada dalt, hom prova que $\left(\frac{a'_v}{a_v}\right)$ és també una sèrie fonamental, el nombre corresponent de la qual lliura la definició per al quocient $\frac{b'}{b}$.

Les operacions elementals entre un nombre b donat a través d'una sèrie fonamental (a_v) i un nombre racional a donat directament s'inclouen en el que acabem d'establir, quan hom fa $a'_v = a$, $b' = a$.

Ara vénen primerament les definicions d'igualtat, de més gran que i de més petiti que, entre dos nombres b i b' (on b' pot ser també $= a$), i hom diu certament que $b = b'$, o $b > b'$, o $b < b'$, segons que $b - b'$ sigui igual, més gran, o més petit, que zero.

Després de tot això es prova, com a proposició estrictament demostrable, que si b és el nombre determinat a través d'una sèrie fonamental (a_v) , llavors $b - a_v$ amb v augmentat esdevé menor, segons la quantia absoluta, que un

qualsevol nombre racional pensable o, el que vol dir el mateix, que

$$\lim_{v=\infty} a_v = b.$$

Posi hom atenció en aquest punt capital, la significació del qual pot ometre's fàcilment: en la tercera forma de definir els nombres reals no es defineix el nombre b com a "límit" dels membres a_v d'una sèrie fonamental (a_v); perquè això esdevindria una falta lògica anàloga a la feta ressaltar en la discussió de la primera forma de definir-los [la de Weierstrass], i certament per la raó que llavors es presumiria l'existència del $\lim_{v=\infty} a_v$; cal dir,

però, que l'afer va a l'inrevés: que el concepte b ha estat pensat, per mitjà de la nostra definició precedent, amb tals propietats i relacions respecte dels nombres racionals que des d'aquí es pot treure amb evidència lògica la conclusió: existeix $\lim_{v=\infty} a_v$ i és

igual a b . Demano aquí disculpes per l'allargament que ocasiono amb l'observació que la majoria ometen aquest petit detall insignificant i llavors fàcilment s'emboliquen en dubtes i en contradiccions respecte de l'irracional, de els quals coses s'alliberarien completament si prestessin atenció a les circumstàncies aquí ressaltades; perquè aleshores reconeixerien clarament que el nombre irracional, gràcies a la propietat que la definició li dona, té tant una realitat determinada en el nostre esperit com la té el racional, àdhuc com la té el nombre racional enter, i que cal no abastar-lo primerament per mitjà d'un procés límit, sinó que al contrari és per mitjà de la seva possessió quan hom es conveç absolutament de la viabilitat i de l'evidència dels processos límit; perquè hom pot eixamplar ara fàcilment la proposició acabada d'esmentar amb la següent: si (b_v) és un qualsevol conjunt de nombres racionals o irracionals amb la

condició que $\lim_{v \rightarrow \infty} (b_{v+\mu} - b_v) = 0$ (sigui μ el que sigui), llavors hi ha un nombre tal determinat per mitjà d'una sèrie fonamental (a_v) de manera que

$$\lim_{v \rightarrow \infty} b_v = b$$

Es palesa doncs que els mateixos nombres b , que es defineixen talment en base a sèries fonamentals (a_v) (anomeno d'ordre primer aquestes sèries fonamentals) que passen com a límits d' a_v , són també representables de múltiples maneres com a límits de sèries (b_v) , on cadascun dels b_v es defineix per mitjà d'una sèrie fonamental d'ordre primer $(a_\mu^{(v)})$ (amb v fixat).

Esmento per això un tal cojunt (b_v) , quan té la condició que $\lim_{v \rightarrow \infty} (b_{v+\mu} - b_v) = 0$ (per a qualsevol μ), una sèrie fonamental de segon ordre, etc.»

El text il·lustra si més no com les concepcions aritmetitzants (incloses les de Weierstrass i les de Dedekind) legitimen les operacions bàsiques, i exemplifica un cas de les aproximacions per sèries als irracionals (o als propis racionals): i cal parar atenció que Cantor cregués que podia superar la definició de Weierstrass perquè, tal i com la seva magnífica memòria *Über unendlichen lineare Punktmannigfaltigkeiten* palesa, admeté un ús del mot 'infinit' que va força enllà de l'ús d'un 'etcètera'⁶, on pensà

⁶L'autor escrigué per exemple: «*Was ich behaupte und durch dieses Arbeit, wie auch durch meine früheren Versuche bewiesen zu haben glaube, ist, dass es nach dem Endlichen ein Transfinitum (welches man auch Suprafinitum nennen könnte), d.i.eine unbegrenzte Stufenleiter von bestimmten Modis gibt, die ihrer Natur nach nicht endlich, sondern unendlich sind, welche aber ebenso wie das Endliche durch bestimmte, wohldefinierte*

que superava una concepció potencial aristotèlica. El lector acordarà que uns tals usos no semblen pas massa acceptables des del punt de mira lògic en la mesura que la nostra capacitat lògica seria més aviat minsa⁷, la qual cosa deixaria la meritòria exposició de Cantor al mateix nivell que la de Weierstrass.

3. Deixant les definicions de Ch.Méray i de K.Weierstrass la teoria del «tall» dedekindà, que presentà en el seu treball (exemplar per la seva senzillesa i claredat) *Stetigkeit und irrationale Zahlen*⁸ (1872), teoria que prou autors seguiren o on s'inspiraren -- Whitehead i Russell entre d'altres⁹ -- la podríem resumir molt breument de la següent manera: circumscrit als nombres racionals, les propietats dels quals cregué que calia

und voneinander unterscheidbare Zahlen determiniert werden können», loc.cit., pàg.176.

⁷Per a la noció d'infinít remetem el lector al nostre treball *Lògica, llenguatge i matemàtica*, Barcelona, Anthropos, 1993 (Estudis de filosofia 8), pàgs.181-182; 162. Noti's que assenyalem «des del punt de mira lògic», cosa que no implica la utilitat conjunta d'un ús lingüístic d'"infinít' en tant que treballem *qua* matemàtics.

⁸cf. Dedekind, Richard, *Gesammelte mathematische Werke*, 3 vols., Braunschweig, Friedrich Vieweg, 1930-1932; l'obra esmentada es recull en el vol.III, pàgs.335-391.

⁹cf.*Principles of mathematics*, caps.XXXIII-XXXIV, *Principia Mathematica*, II*210-214 (segments i relacions dedekindianes); III*310ss (tractament dels nombres reals), *Introductio to mathematical philosophy*, Londres, Allen and Unwin, 1919 (1^a ed.; 11^a ed. 1963), pàgs.66-73, etc.

estimar d'una manera merament aritmètica (§1), observà que hom podia separar el conjunt de tots els nombres racionals en dues classes (representades per lletres majúscules amb subíndex, per exemple A_1, A_2) tals que cada nombre (racional) que pertany a la primera classe sigui més petit que cada nombre (racional) que pertany a la segona classe, de tal manera que cadascuna de les moltes separacions possibles dels racionals en dues classes constitueix un *tall* [representat per (A_1, A_2)]. Quan un nombre que pertany a la primera classe és més gran que qualsevol dels altres, o quan un nombre que pertany a la segona classe és més petit que qualsevol dels altres, direm que aquest nombre (racional) correspon al tall considerat, o fins i tot que produeix aquest tall (cf. § 4).

Dedekind relacionà llavors els nombres racionals amb els punts d'una línia recta, cosa que serveix de base per a la geometria mètrica (§ 2), i recordà que els grecs ja tingueren consciència amb la incommensurabilitat que una línia podia tenir infinits punts que no corresponen a cap nombre racional. Si desitgem doncs de disposar de mitjans aritmètics que tinguin la mateixa continuïtat (*Stetigkeit*) que la línia recta cal la creació d'uns nous nombres a definir per mitjans merament aritmètics, fins i tot admetent que hagin estat les representacions geomètriques les que n'hagin donat l'ocasió. I per això, afegí, hem de tenir una circumscripció precisa de la continuïtat que pugui servir com a base d'una deducció efectiva; cregué doncs que l'essència de la continuïtat rauria en el següent principi: *«dividits tots els punts d'una recta en dues classes de manera que qualsevol punt de la primera classe estigui a l'esquerra de qualsevol punt de la segona classe, llavors sols hi ha un punt que produeixi una tal distribució de tots els punts en dues classes, la partició de la recta en dos trossos»*, supòsit que estimà un axioma indemostrable (§3).

Tornant de bell nou als nombres i als talls, hom pot concloure fàcilment que hi ha infinitament molts talls que no es

poden produir per mitjà de nombres racionals: l'arrel d'un nombre que no és un quadrat, per exemple, produeix un tall i no és un nombre racional. Per tant quan hi ha un tall que no el pot produir un nombre racional, creem un nou nombre, irracional, que prenem com a completament definit per aquest tall: diem que el nombre α correspon a aquest tall o que produeix aquest tall. Per a cada tall hi haurà doncs un nombre racional o irracional determinat, i considerem que dos nombres són diferents o no iguals sols quan corresponguin a dos talls diferents; per consegüent Dedekind passà després a estudiar les relacions de majoritat, de minoritat i d'igualtat entre dos talls produïts per nombres reals tenint sempre en compte primer que els individus de les classes són nombres racionals, que poden produir també un tall mentre pertanyen a la primera o a la segona classe: d'aquí que si (A_1, A_2) , (B_1, B_2) són dos talls en els quals sols hi ha un únic nombre a_1 que pertanyi a A_1 , però no a B_1 , llavors els dos talls no són essencialment diferents (a_1 essent racional i el tall també) -- si n'hi ha dos que pertanyin a A_1 , però no a B_1 , aleshores n'hi haurà una multitud infinita que pertanyen a A_1 , però no a B_1 , i hi trobarem relacions de majoritat i de minoritat entre talls; i un tall (A_1, A_2) produït per un nombre irracional distribueix (d'acord amb allò que hem dit dalt) els racionals en dues classes amb infinits individus (si el tall el produeix un nombre racional, llavors pot pertànyer a una classe o a l'altra).

Amb tot això ja pot bastir doncs el sistema dels nombres reals -- canviem el sistema R dels nombres racionals (i les lletres de classe, per exemple A_1 , B_1 , etc.) pel sistema \bar{R} de tots els nombres reals -- amb les següents lleis:

I. Si $\alpha > \beta$, i $\beta > \gamma$, llavors $\alpha > \gamma$ (diem que el nombre β es troba entre α i γ).

II. Si α i β són dos nombres diferents, hi ha infinitament molts nombres entre α i β .

III. α essent un nombre determinat, tots els nombres del sistema R es divideixen en dues classes U_1 i U_2 (cadascuna constant d'infinits individus); la primera classe U_1 comprèn tots els nombres α_1 que són $< \alpha$, la segona classe U_2 tots els nombres α_2 que són $> \alpha$; el nombre α pot estimar-se que pertany a la primera o a la segona classe, i diem que produeix la divisió.

IV. Sols existeix un sol nombre α que produeixi la divisió del sistema R de tots els nombres reals en dues classes (principi de la continuïtat per al sistema R (§5).

Després passà al càlcul amb nombres reals (§6), que exemplificà amb la suma; tanmateix cregué que sols amb la introducció del concepte d'interval seria possible de definir per als nombres reals totes les innumbrables proposicions de l'aritmètica dels nombres racionals, la qual cosa requeriria a més a més el concurs dels conceptes de quantitat variable, de funció i de valor límit: les definicions de les operacions aritmètiques més simples es basarien en aquests conceptes. Tot seguit assajà dues aproximacions al concepte de límit en connexió amb el principi de la continuïtat en els nombres reals (§7).

Llavors caldria admetre potser que en la magnífica aportació dedekindiana a l'estudi de l'irracional hi ha una colla d'assumpcions que sols semblen poder-se avaluar com una manera d'exposar els afers, per exemple: (1) el caràcter originàriament autònom de l'aritmètica respecte de les representacions (incloses les de la geometria); (2) l'afirmació que el descobriment dels incommensurables pels grecs mostrà que una línia recta té més punts que el conjunt dels nombres racionals; (3) l'explícita remarca que el nombre irracional es considera definit completament pel tall (A_1, A_2) , car no sembla que hi pugui haver un nombre, racional o irracional, capaç de produir un tall entre

dues sèrie de nombres sense tenir-lo prèviament¹⁰; (4) àdhuc el mateix principi de continuïtat per a les línies, que seria una comanda més o menys lingüística (per exemple hom podria postular, sembla, que calen dos punts per a fer una tal distribució); i val la pena afegir (5) que totes les teories dels irracionals es fonamenten, com reconeix Dedekind fins i tot per a la seva pròpia teoria¹¹, en allò que s'ha fet sempre en matemàtiques a l'hora de

¹⁰Si els mots d'A.Pringsheim i de J.Molk referits a la noció purament aritmètica de tall de Dedekind són exactes («*Elle [la coupure] permet de définir le nombre irrationnel sans faire appel à la suite infinie ou à l'ensemble de nombres rationnels qui le représentent dans la doctrine de Méray-Cantor ou dans celle de Weierstrass*», *loc.cit.*, pàg.153) llavors el punt (3) sembla insalvable. Però potser no hauríem d'excloure raonaments del següent tipus: aturant-nos al nivell de classes integrades per nombres racionals, Dedekind creu que un tall (A_1, A_2) està completament donat quan es coneix una de les dues classes (per exemple A_1), sabent, és clar, que si a_1 està contingut a A_1 , també hi seran tots els nombres més petits que a_1 , cosa que sembla poder remetre'ns a consideracions amb infinitament molts individus quan el tall defineix un nombre irracional, amb la qual cosa podríem pensar-nos que quasi som en una concepció de l'irracional per sèries (semblant per exemple a la de Cantor) de nombres racionals, però Dedekind definint l'irracional a partir de l'analogia amb el principi de continuïtat per a la línia (i el racional considerant-lo prèviament donat, cosa que no dificulta d'estimar-lo com a productor d'un tall). D'altra banda les exemplificacions que fa de l'ús del principi de continuïtat en els límits semblen incloure tàcitament aproximacions infinitesimals.

¹¹Cf.també *Was sind und was sollen die Zahlen*, *loc.cit.*, vol.III, pàgs.340-341.

calcular una arrel irracional ($\sqrt{2}$, etc.), això és, la cerca d'un nombre el múltiple del qual sigui el quadrat de l'arrel, d'acord amb *Eucl.V.Def.5*.

4. En conjunt sembla que les teories aritmetitzants de l'irracional en siguin més aviat presentacions lingüístiques, d'un indubtable interès perquè permetrien, per exemple, un tractament lingüístic unitari d'irracionals d'origen divers, però que difícilment puguin suplir le càlcul radical. Versemblantment no podrien definir *stricto sensu* quelcom com $\sqrt{2}$, però sí lliurar-ne una aproximació; no podrien demostrar, sembla, que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, però oferirien al seu nivell lingüístic noves corroboracions per a l'acceptació d'un tal producte, i aquesta vegada per mitjà d'aproximacions.

Conclouríem que allò que ens ofereix el simbolisme d'un radical com $\sqrt{2}$ no ho podria expressar sinó un mitjà lingüístic paral·lel, i que la seva valoració hauria de passar per un estudi de les bases que permeteren la seva assumpció prou abans del segle XIX; les aproximacions aritmetitzants serien sols, quan es poguessin valorar així, el perllongament de les aproximacions de tots els temps, incloses les gregues: aquesta vegada també per a les operacions amb radicals.

D'altra banda hom podria prendre, per exemple, la posició de L.Kronecker, quan criticà les teories aritmetitzants de ser poc aritmètiques (és a dir, d'introduir mitjans estranys a l'aritmètica, circumscrita aquesta a les propietats dels nombres naturals i als sistemes de nombres naturals: l'anàlisi matemàtica s'hi reduiria), i d'haver definit lògicament, però no matemàticament, els nombres irracionals, per mitjà de la qual definició hom conferiria als conjunts (infinits) de nombres racionals el caràcter d'una sèrie orgànica. El criticisme de Kronecker assenyalà certament una de les dificultats d'algunes posicions aritmetitzants, i el seu rebuig

d'incloure els nombres irracionals en una qualsevol demostració definitiva d'una proposició d'anàlisi matemàtica (la noció de nombre irracional no hi tindria un *status* de dret, sinó que seria un auxiliar que facilitaria el descobriment de fets nous) pot ser sens dubte un repte, fins i tot avui dia.

Podríem admetre en efecte que la noció de nombre irracional fos aliena a l'univers numèric quan el circumscriguéssim a les quantitats finites susceptibles de rebre l'ús de mots numèrics estàndards (i als corresponents mitjans literals abreujadors), i cal acceptar que el fet de tenir per exemple els conjunts infinits de nombres racionals com a nombres (irracionals) crea una certa distorsió a l'hora de concebre clarament què és el nombre. Tot i això, independentment que excloguéssim o no l'irracional de gaudir de carta de naturalesa en l'univers numèric (no seria de fet un nombre, sinó una noció auxiliar), val la pena d'assenyalar que subsistirien encara una colla de qüestions capitals, és a dir: (1) la mateixa existència d'un càlcul amb arrels irracionals, que els nostres avantpassats acceptaren; (2) llur descobriment de l'incommen-surabilitat i llur creença en incommensurables (i en irracionals); (3) l'ús polisèmic del mot 'nombre' quan s'usa per a ens diversos com són les quantitats racionals i allò que adjectivem d'irracional, i (4) la consegüent valoració lògica d'uns tals fets.

QUADERNS DE FILOSOFIA

1. *Sobre l'ús del mot 'bo'*, desembre 1997.
2. *Què vol dir responsabilitat?*, abril 1998.